

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

BASS, L.: Zur Theorie der Mahlvorgänge	283
CHEN, Y.-N.: Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder	293
HOPKINS, H. G., and PRAGER, W.: On the Dynamics of Plastic Circular Plates	317
MORGAN, A. J. A.: Stress Distributions in Semi-Infinite Solids of Revolution	330

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BOESCH, W.: Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk	341
LÜSCHER, E.: Prüfgerät für Photomultiplier	343
ZBORNIK, J.: Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen	345

Varia - Miscellaneous - Divers

Erratum	352
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	352

ZAMP	Vol. V	Fasc. 4	Pag. 283-354	15. 7. 54
------	--------	---------	--------------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
OCT 27 '54

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten von Fr. 15.-* pro Seite zu entrichten. Für Arbeiten, die mehr als 24 Seiten Umfang aufweisen, bedarf es einer Verständigung mit der Redaktion.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of Fr. 15.-* per page exceeding these 16 pages. In case of articles of more than 24 pages, a special arrangement has to be made with the Editor.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de Fr. 15.-* doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 24 pages ou plus, l'auteur est prié de se mettre en relation avec la rédaction.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland Fr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Deutschland	Finnland	Holland
Italien	Marokko	Norwegen	Portugal	Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{3}{4}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

Zur Theorie der Mahlvorgänge

Von LUDWIG BASS, Reutte, Tirol¹⁾

Einführung

Die grundlegende Frage der vorliegenden Theorie der Mahlvorgänge besteht darin, bei gegebenen, festgehaltenen Mahlbedingungen die Gewichtsverteilung des Mahlgutes als Funktion der Mahldauer auszudrücken. Es soll also bei bekannter Anfangsverteilung $M(x, 0)$ die Funktion $M(x, t)$ bestimmt werden, die dadurch definiert ist, dass der Ausdruck

$$M(x, t) dx$$

das Gewicht der Körner des Mahlgutes, deren Grössen zwischen x und $x + dx$ liegen, zur Zeit t angibt.

Die vorliegende Theorie ist im wesentlichen eine phänomenologische; nur so konnten die komplizierten und experimentell wenig erforschten Vorgänge in Mühlen verhältnismässig einfach mathematisch erfasst werden. Die Theorie beruht insofern auf statistischer Grundlage, als die dort eingeführten Grössen erst bei einer grossen Anzahl der Körner aller im Mahlgut vorhandenen Grössenbereiche reproduzierbar werden.

Es sei $\varepsilon(\xi, x)$ die Masse der Körner im Grössenintervall $(x, x + dx)$, die beim Mahlen pro Zeiteinheit aus einer Einheitsmasse der Körner des Grössenintervalls $(\xi, \xi + d\xi)$ entstehen. Dieser Definition treten drei Voraussetzungen bei.

1. Bei dem Mahlen geht eine «reine Zerkleinerung» vor sich, das heisst, dass sich kleinere Körner nicht zu grösseren vereinigen. Daraus folgt, dass $\varepsilon(\xi, x)$ nur im Bereich $0 \leq x \leq \xi \leq x_m$ von Null verschieden sein kann (mit x_m wird die maximale im Mahlgut vorhandene Korngrösse bezeichnet).

2. Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ ist zeitunabhängig. Diese Voraussetzung ist nur dann berechtigt, wenn die durch die Korngrössenveränderungen verursachten Effekte, vor allem das Polstern der Mühle mit sehr kleinen Körnern, vernachlässigt werden können (das Volumen des Mahlgutes muss sehr klein sein gegenüber dem Volumen der Mühle).

¹⁾ Metallwerk Plansee.

3. Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ ist im Bereich $0 \leq x \leq \xi \leq x_m$ stetig. Die Berechtigung dieser Annahme beruht im folgenden: Es können zwar plötzliche starke Veränderungen von $\varepsilon(\xi, x)$ in solchen Bereichen erscheinen, wo sich die Eigenschaften des Materials und der Mahlvorrichtung, die das Zerspalten der Körner beeinflussen, plötzlich ändern. Ein solches Verhalten von $\varepsilon(\xi, x)$ in der Koordinate x ist zu erwarten, wenn die Körner bis zur Grösse der sogenannten idealen Gitterbereiche¹⁾ zerkleinert werden, bei der ihre Festigkeit stark zunimmt, und ebenfalls in der Koordinate ξ , wenn die Körner die Grösse der Poren der Mahlkörper erreichen. Nun besteht das Mahlgut aus sehr vielen idealen Gitterbereichen, deren Grösse in einem gewissen Intervall schwankt; die Verteilungskurve dieser Gitterbereiche wird deshalb annähernd stetig, so dass, auch wenn die Idealkristalle in der Mühle nicht zerspalten werden können, $\varepsilon(\xi, x)$ stetig bleibt. Die zahlreichen Poren der Mahlkörper sind ebenfalls nicht alle gleich gross, so dass sie bloss um so stärkere Veränderungen von $\varepsilon(\xi, x)$ in ξ bewirken können, je kleiner ihr Grössenbereich ist.

Ähnliche Überlegungen führen zur Annahme der Stetigkeit von $M(x, t)$. Da $M(x, t)$ im ganzen Korngrössenbereich definiert und endlich ist, sind nur Unstetigkeiten durch endliche Sprünge denkbar. Zu solchen wäre aber eine Anzahl von Körnern genau gleicher Grösse notwendig; dies trifft aber nicht zu, da sich praktisch jedes Korn im Gewicht vom andern etwas unterscheidet und da die Theorie eine grosse Anzahl von Körnern aller vorhandenen Grössenbereiche voraussetzt. Anstatt der Sprungstellen können so nur stellenweise starke Änderungen auftreten. Diese Überlegung gilt für jeden Zeitpunkt.

Der Einfachheit halber wird im weiteren vorausgesetzt, dass sich die Körner bis zu einer beliebigen kleinen Grösse zermahlen lassen. Wenn dies nicht zutrifft, etwa wegen der Festigkeit der idealen Gitterbereiche, braucht man im folgenden nur die untere Grenze des gesamten Korngrössenbereiches von Null auf eine minimale Korngrösse zu verändern und zu beachten, dass $\varepsilon(\xi, x)$ nur in dem so beschränkten Bereich von Null verschieden sein kann.

Die Grundgleichung

Die zeitliche Veränderung $\partial M(x, t)/\partial t$ besteht aus den Übergängen zweier Teilchenarten:

- a) Übergänge der Trümmer der Körner, die vor der Zerspaltung grösser als $x + dx$ waren. Die Masse solcher Trümmer, die pro Zeiteinheit in das betrachtete Intervall $(x, x + dx)$ übergehen, beträgt zur Zeit t

$$\int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi.$$

¹⁾ W. KLEMM und A. SMEKAL, Naturwissenschaften 29, 688 (1941).

- b) Übergänge der Trümmer der Körner, deren Grösse vor der Zerspaltung im Intervall $(x, x + dx)$ lag. Die Masse der Trümmer, die pro Zeiteinheit dieses Intervall verlassen, beträgt zur Zeit t

$$M(x, t) \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha.$$

Es gilt daher allgemein

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} + M(x, t) \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi. \quad (1)$$

Diese partielle Integrodifferentialgleichung ist die Grundgleichung der vorliegenden Theorie.

Da beim Mahlen nur kleinere Teilchen aus grösseren entstehen können («reine Zerkleinerung»), gibt es keine anderen Übergänge als die oben angeführten, vorausgesetzt, dass keine Teilchen aus der Mühle verschwinden. Die Grundgleichung (1) muss deshalb das Prinzip der Erhaltung der gesamten Masse erfüllen. Tatsächlich folgt aus (1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x_m} M(x, t) dx = 0,$$

da

$$\int_0^{x_m} dx \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi - \int_0^{x_m} dx \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) M(x, t) d\alpha = 0$$

gilt. Da nämlich $\varepsilon(\xi, x)$ im Bereiche $\xi \leq x$ gleich Null ist, verschwinden die Integrale

$$\int_0^x \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi, \quad \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) dx.$$

Deswegen ist

$$\begin{aligned} \int_0^{x_m} dx \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi &= \int_0^{x_m} dx \int_0^x \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \\ &= \int_0^{x_m} d\xi \int_0^x \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx = \int_0^{x_m} d\xi \int_0^\xi \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Ermittlung der Funktion $\varepsilon(\xi, x)$. Experimentelles

Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ enthält implizite alle spezifischen Eigenschaften des gemahlten Materials und der Mahlvorrichtung, die mit der Zerkleinerung zusammenhängen. Sie ist viel zu kompliziert, um direkt aus Messungen bestimmt zu werden. Im folgenden wird deshalb gezeigt, wie sie aus einer für Messungen geeigneten Annäherung indirekt bestimmt werden kann.

Der gesamte Korngrößenbereich $0 \leq x \leq x_m$ wird in m Teilbereiche mit den Grenzen $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ unterteilt. Dabei wird vorausgesetzt, dass

$$|x_i - x_{i-1}| \ll \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad (2)$$

sei. Durch $M_i(t)$ wird die Masse der Körner bezeichnet, deren Grössen zur Zeit t zwischen x_{i-1} und x_i liegen:

$$M_i(t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x, t) dx.$$

Durch λ_{ik} wird weiter die Grösse

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi$$

bezeichnet. Der physikalische Inhalt der Bedingung (2) besteht in folgendem.

1. Die Teilbereiche sind so klein gegenüber den entsprechenden Korngrössen, dass, wenn ein Korn zertrümmert wird, die Masse derjenigen der so entstandenen Trümmer, deren Grössen im Teilbereich des ursprünglichen Kornes bleiben, vernachlässigt werden kann, das heisst

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{\xi} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_x^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \approx 0. \end{aligned}$$

Die ersten zwei Gleichheitszeichen folgen aus der Bedingung der reinen Zerkleinerung

$$\varepsilon(\xi, x) = 0, \text{ wenn } \xi \leq x.$$

Hier wurde die Zerkleinerung durch das Reiben und durch Stösse zwischen den Körnern, wodurch von den Körnern sehr kleine Teilchen abgetrennt werden, vernachlässigt. Dies ist zulässig, da das Volumen des Mahlgutes klein gegenüber dem Volumen der Mühle vorausgesetzt wird und da ausserdem das Mahlen mit Mahlkörpern wesentlich schneller vor sich geht.

2. Bei der Mittelwertbildung

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} M(\xi, t) d\xi = M({}^i x, t) (x_i - x_{i-1}),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi = M({}^i x', t) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi \quad (x_{i-1} \leq {}^i x \leq x_i)$$

kann wegen der Bedingung (2)

$$M({}^i x, t) \approx M({}^i x', t)$$

gesetzt werden.

Man integriere nun die Grundgleichung (1) in einem der Teilbereiche, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Unter Anwendung der Bedingung (2) ergibt sich für die einzelnen Glieder

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x, t) dx = \frac{d}{dt} M_i(t),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_0^{x_{i-1}} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx = M({}^i x, t) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi = \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \right) M_i(t),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_i}^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi = \sum_{k=i+1}^m M({}^k x, t) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon(\xi, x) d\xi = \sum_{k=i+1}^m \lambda_{ki} M_k(t),$$

so dass die Grundgleichung (1) unter der Voraussetzung (2) in ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dM_i}{dt} + \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \right) M_i = \sum_{k=i+1}^m \lambda_{ki} M_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

zerfällt. Die Gesamtheit der Lösungen des Systems (3), die durch die üblichen Integrationsmethoden berechnet werden, stellt schon eine angenäherte Lösung der Grundgleichung (1) dar. Die Anfangsbedingungen $M_i(0)$ ergeben sich aus der bekannten Anfangsverteilung $M(x, 0)$.

Der zeitliche Verlauf der Grössen $M_i(t)$ kann experimentell leicht verfolgt werden, indem das Mahlen in regelmässigen Zeitabständen unterbrochen, das Mahlgut durch Sieben in die Fraktionen M_i getrennt und gewogen wird. Ausserdem wird für jedes M_i ($i \neq 1$) die reine zeitliche Abnahme verfolgt, indem alle Körner grösser als x_i jeweils von vornherein abgesiebt werden; daraus ergeben sich die spezifischen Zerfallsgeschwindigkeiten in den durch das Absieben

vereinfachten Gleichungen (3)

$$-\frac{dM_i}{dt} = \alpha_i M_i, \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \quad (i = 2, 3, \dots, m).$$

Aus diesen beiden Messreihen können alle λ_{ik} berechnet und die Gültigkeit des Systems (3) geprüft werden. In einer Arbeit von SEDLATSCHKE und BASS¹⁾, in der die Näherung (3) direkt aus statistischen Überlegungen abgeleitet und als eine selbständige Theorie dargestellt worden ist, wurde dies durchgeführt. Es ergab sich eine befriedigende Übereinstimmung der berechneten Resultate mit den Messungen. Auf dieser Übereinstimmung beruht auch die experimentelle Bestätigung der vorliegenden Theorie, die ja eine Verfeinerung der ersteren in demselben Gültigkeitsbereich ist, da sie den Grenzfall von (3) für unendlich viele, infinitesimale Teilbereiche darstellt.

Die unter Anwendung der Näherung (3) aus den Messungen ermittelten λ_{ik} werden nun zur Bestimmung der Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ benützt, indem man nach der Methode der kleinsten Quadrate fordert, dass der Ausdruck

$$\sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{i-1} \left[\lambda_{ik} (x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi \right]^2 + \lambda \varepsilon(x, x)$$

ein Minimum annimmt. Für praktische Zwecke werden so die Parameter einer geeignet gewählten Interpolationsfunktion bestimmt. Prinzipiell kann $\varepsilon(\xi, x)$ nach dem Satz von WEIERSTRASS mit beliebiger Genauigkeit durch Polynome approximiert werden, wenn man von den mit steigender Anzahl der Teilbereiche zunehmenden experimentellen Schwierigkeiten absieht. In diesem strengen Fall verschwindet jeder der $m(m-1)/2$ Klammerausdrücke, mit der zusätzlichen Bedingung $\varepsilon(x, x) = 0$; aus dem so entstandenen System linearer Gleichungen können $[m(m-1)/2] + 1$ Koeffizienten eines Polynoms bestimmt werden.

Lösungen der Grundgleichung

Die Grundgleichung (1) hat zwei konstante Lösungen. Die triviale Lösung bezieht sich auf eine leer laufende Mühle. Für den Endzustand gilt²⁾

$$M(x, \infty) = \delta(x) \int_0^{x_m} M(x, t) dx, \quad (4)$$

da eine «reine Zerkleinerung» vor sich geht und da die gesamte Masse konstant bleibt. (4) ist tatsächlich eine Lösung, da durch die Substitution in (1) jedes

¹⁾ K. SEDLATSCHKE und L. BASS, Powder Metal. Bull. 6, 148 (1953).

²⁾ $\delta(x)$ bedeutet die Diracsche Deltafunktion.

Glied einzeln verschwindet: das erste wegen der Konstanz von (4); das zweite Glied verschwindet bei $x \neq 0$, indem die δ -Funktion verschwindet, bei $x = 0$ wegen der gleichen Integrationsgrenzen. Das Glied auf der rechten Seite von (1) verschwindet ebenfalls, da

$$\int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(0, x) = 0 \quad (x \leq \xi \leq x_m).$$

In geschlossener Form lässt sich auch die angenäherte Lösung für grosse (das heisst von x_m wenig verschiedene) Korngrössen darstellen. Das Integral auf der rechten Seite von (1) kann bei $x \rightarrow x_m$ wegen dem kleinen Integrationsbereich vernachlässigt werden, da der Integrand stetig ist. Integration der so vereinfachten Gleichung (1) ergibt

$$M(x, t) = M(x, 0) e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha} \quad (5)$$

Diese Lösung entspricht der bekannten halbempirischen Formel von ROSIN und RAMMLER¹⁾, die dadurch zum erstenmal theoretisch begründet und ihr Gültigkeitsbereich festgelegt wird. (O. THEIMER²⁾ leitete diese Formel mit den Methoden der statistischen Mechanik ab, allerdings nur für den Fall einer zeitunabhängigen Gleichgewichtsverteilung; dabei liess er die Bedingung der «reinen Zerkleinerung» fallen und führte vereinfachte Voraussetzungen über die physikalische Beschaffenheit der Körner ein.)

Die Rosin-Rammlersche Formel lautet in der hier benützten Ausdrucksweise

$$M(x, t) = \frac{n}{x} \left(\frac{x}{F}\right)^n e^{-\left(\frac{x}{F}\right)^n}, \quad (6)$$

wobei n und F für jede Mahldauer neu, empirisch und unabhängig voneinander zu bestimmende Konstanten sind, die so implizite die Zeitabhängigkeit der Verteilung enthalten. Man kennt aber keine Verknüpfung dieser zwei Konstanten, obwohl sie offenbar miteinander zusammenhängen müssen; die Anfangsverteilung $M(x, 0)$ bleibt ebenfalls unberücksichtigt, so dass die Formel (6) bestenfalls erst nach einer unbestimmten Mahldauer benützt werden kann, je nachdem, wie ähnlich $M(x, 0)$ einer Verteilung vom Typ (6) ist.

Die im folgenden angegebene angenäherte Lösung für kleine Korngrössen sowie die strenge Lösung des Mahlproblems zeigt, dass $M(x, t)$ nur im Bereiche der grossen Korngrössen in geschlossener Form (mit einem Exponentialterm) dargestellt werden kann. Die theoretische Begründung der Rosin-Rammlerschen Formel ist deshalb nur in diesem Bereiche möglich. Die Anwendung von (6) in den übrigen Bereichen wird dadurch erzwungen, dass die Konstanten n und F

¹⁾ P. ROSIN und E. RAMMLER, Koll.-Z. 67, 16 (1934).

²⁾ O. THEIMER, Koll.-Z. 128, 1 (1952).

zu diesem Zwecke verfügbar gemacht werden, indem ihr Zusammenhang und ihre Zeitabhängigkeit unterdrückt werden durch die in jedem Zeitpunkt wiederholte empirische Bestimmung der zwei Konstanten aus dem Verlauf im *gesamten* Korngrössenbereich. Ausserdem bewirkt diese wiederholte Bestimmung das jeweilige Anpassen der Formel (6) an die zeitabhängigen Auswirkungen der Anfangsverteilung, die sonst unberücksichtigt bleibt. Der Vergleich von (5) mit (6) ergibt als entsprechende Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} M(x, 0) &\longleftrightarrow \frac{n(t)}{x} \left[\frac{x}{F(t)} \right]^{n(t)}, \\ t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha &\longleftrightarrow \left[\frac{x}{F(t)} \right]^{n(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Näherung (5) wird bei grossem t genauer. Wegen der Eigenschaft der «reinen Zerkleinerung» wird nämlich bei genügend grossem t

$$M(x_1, t) > M(x_2, t) \quad \text{wenn} \quad x_1 < x_2.$$

Je grösser dann t wird, um so stärker wird diese Ungleichheit und um so kleiner $M(\xi, t)$ im Intervall $x \leq \xi \leq x_m$. Mit dieser Verschärfung der Annäherung (5) wächst ihr Gültigkeitsbereich. Daraus erklärt sich die bekannte Erscheinung bei der Anwendung der Rosin-Rammlerschen Formel, nämlich dass sich die Anwendbarkeit dieser Formel mit wachsender Mahldauer verbessert. Die Formel (6) nähert sich der Formel (5), soweit es die jeweilige Ähnlichkeit der Ausdrücke (7) erlaubt, da die theoretisch unzulässige Anwendung von (6) in immer kleineren Bereichen durch die *ad hoc* getroffene Wahl der zwei Konstanten erzwungen werden muss.

Bei kleinen Korngrössen kann das zweite Glied auf der linken Seite von (1) vernachlässigt werden, da der Integrationsbereich klein wird und der Integrand stetig ist. Es bleibt übrig

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi.$$

Die Integration nach der Zeit ergibt

$$M(x, t) - M(x, 0) = \int_x^{x_m} d\xi \int_0^t \varepsilon(\xi, x) M(\xi, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Die Substitution

$$x' = x_m - x, \quad \xi' = x_m - \xi$$

transformiert den Integrationsbereich der Variablen ξ in das Dreieck

$$0 \leq \xi' \leq x' \leq x_m.$$

Die vorige Gleichung geht dadurch über in

$$M'(x', t) - M'(x', 0) = \int_0^{x'} d\xi' \int_0^t \varepsilon'(\xi', x') \cdot M'(\xi', \tau) d\tau.$$

Der Kern dieser Integralgleichung, $\varepsilon'(\xi', x')$, ist im Bereiche

$$0 \leq \xi' \leq x' \leq b, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq b$$

stetig, wobei $b > x_m$ eine endliche Zahl ist. Dies ist eine Volterrasche Doppelintegralgleichung zweiter Art mit der Lösung¹⁾ (die Striche werden im folgenden weggelassen)

$$M(x, t) = M(x, 0) - \int_0^x d\xi \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x, t; \xi, \tau) M(\xi, 0) dt, \quad (9)$$

wo K_i die entsprechenden iterierten Kerne sind:

$$K_1 = -\varepsilon(\xi, x), \quad K_i(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\xi}^x dy \int_{\tau}^t \varepsilon(y, x) K_{i-1}(y, z; \xi, \tau) dz \quad (10)$$

oder allgemeiner, mit grösserer Freiheit in der Berechnung,

$$K_i(x, t; \xi, \tau) = \int_{\xi}^x dy \int_{\tau}^t K_j(x, t; y, z) K_{i-j}(y, z; \xi, \tau) dz. \quad (11)$$

Unter den vorliegenden Bedingungen ist die resultierende unendliche Reihe immer konvergent²⁾.

Da in diesem Falle der Kern, $\varepsilon(\xi, x)$, nicht von der Zeit abhängt, kann jeder iterierte Kern K_i als Produkt eines rein zeitabhängigen Faktors mit einem zeitunabhängigen Faktor K'_i dargestellt werden. Die zweite der Gleichungen (10) lautet dann

$$K_i(x, t; \xi, \tau) = - \frac{(t - \tau)^{i-1}}{(i-1)!} \int_{\xi}^x \varepsilon(y, x) K'_{i-1}(y, \xi) dy,$$

was durch vollständige Induktion leicht bewiesen werden kann.

Die strenge Lösung des gesamten Mahlproblems hat die Form

$$M(x, t) = f(x, t) e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha}. \quad (12)$$

¹⁾ V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégralo-différentielles* (Gauthier-Villars, Paris 1913).

²⁾ V. VOLTERRA, a. a. O.

Um $f(x, t)$ zu berechnen, wird (12) in die Grundgleichung (1) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha} = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) f(\xi, t) e^{-t \int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha} d\xi$$

oder, nach Umformung und Integration nach der Zeit,

$$f(x, t) - M(x, 0) = \int_x^{x_m} d\xi \int_0^t \varepsilon(\xi, x) e^{-\tau \left[\int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha - \int_0^x \varepsilon(x, \beta) d\beta \right]} f(\xi, \tau) d\tau. \quad (13)$$

Die Gleichung (13) unterscheidet sich von (8) nur um den exponentiellen Faktor bei dem Kern. Sie wird deshalb durch dieselbe Transformation wie (8) auf eine Volterrasche Gleichung zweiter Art mit einem stetigen Kern, demselben Integrationsbereich und denselben Konvergenzeigenschaften der Lösung zurückgeführt. Die strenge Lösung ist daher tatsächlich durch (12) gegeben, wobei $f(x, t)$ durch (9) explizite dargestellt ist, wenn dort $M(x, t)$ durch $f(x, t)$ ersetzt wird. Die entsprechenden iterierten Kerne sind durch (10) oder (11) gegeben, wenn man $\varepsilon(\xi, x)$ durch

$$\varepsilon(\xi, x) e^{-\tau \left[\int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha - \int_0^x \varepsilon(x, \beta) d\beta \right]}$$

ersetzt.

Summary

A mathematical theory of milling processes is developed by deriving and solving a partial integro-differential equation which describes the time-dependent particle size distribution of the milling charge. This basic equation contains a characteristic function of both the mill and the material milled, which is conveniently determined from measurements conducted in accordance with an approximation derived for this purpose from the general theory. This approximation, which can as well be used independently is equally convenient for obtaining experimental evidence of the validity of the general theory. It has been established in a previous paper that this approximation is in agreement with results obtained by experiments.

Several approximate solutions of the basic equation as well as the rigorous one are worked out and an analysis of the semi-empirical Rosin-Rammler formula is given from the point of view of the present theory.

(Eingegangen: 25. September 1953.)

Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder¹⁾

VON YIAN-NIAN CHEN, Winterthur²⁾

In gewissen mechanischen Schwingungssystemen mit langen Wellen, die zu Torsionsschwingungen erregt werden, spielen die Massen und Dämpfungen der Wellen selbst eine wesentliche Rolle und dürfen daher nicht vernachlässigt werden. Dieses Problem stellt sich vor allem bei den Schiffsmaschinenanlagen; sie bestehen aus einer Kolbenmaschine, heute meistens einem Dieselmotor, und einem Propeller, die durch eine lange Wellenleitung verbunden sind. In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren entwickelt, um solche Probleme zu lösen. Die Wellenleitung wird im folgenden «Zwischenleitung» genannt, um Verwechslungen mit den elastischen Wellen zu vermeiden, die eben in dieser Zwischenleitung hin- und herwandern.

1. Die Torsionsschwingungen der Zwischenleitung

In Figur 1 bedeuten:

- Θ_1, R_1 das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert des Motors;
- Θ_0, R_0 das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert des Propellers;
- ϑ, R das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert je Längeneinheit der Zwischenleitung;
- J_p das polare Flächenträgheitsmoment des Querschnittes der Zwischenleitung;
- G den elastischen Gleitmodul der Zwischenleitung;
- $M \sin \omega t$ bzw. $M e^{i\omega t}$ das erregende Drehmoment des Motors.

Der Flächensatz beschreibt die Bewegung φ des Leitungselementes dx (Figur 2):

$$\vartheta dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} dx - d\mathcal{M}_R,$$

wobei \mathcal{M} das zu übertragende Drehmoment und \mathcal{M}_R das Dämpfungsmoment darstellen. Drehmoment \mathcal{M} und Verdrehung φ sind durch die Beziehung aus der Elastizitätslehre verknüpft:

$$\mathcal{M} = J_p G \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

¹⁾ Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn A. KLEINER, Chefingenieur der Forschungsabteilung für Dynamik, Gebrüder Sulzer AG., Winterthur.

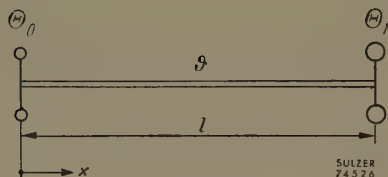
²⁾ Gebrüder Sulzer AG.

Das Dämpfungsmoment M_R wirkt immer der Bewegung entgegen, also in Gegenphase mit der Geschwindigkeit, daher

$$dM_R = R \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx.$$

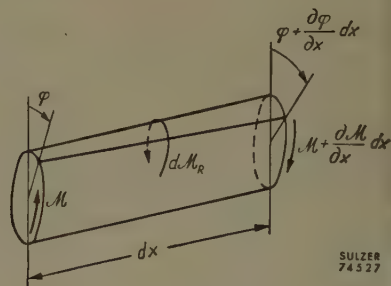
Damit wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{R}{\vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{J_p G}{\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$



Figur 1

Zweimassensystem mit elastischer
Zwischenleitung.



Figur 2

Leitungselement.

Die partielle Differentialgleichung wird nach D'ALEMBERT durch die Funktion befriedigt:

$$\varphi = f\{\varepsilon(ct+x)\} + g\{\varepsilon(ct-x)\} \quad [\varepsilon = \text{Konstante}],$$

welche zwei Wanderwellen darstellt, die sich in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit c durch die Leitung fortpflanzen. Einsetzen dieses Ausdruckes φ in die partielle Differentialgleichung ergibt

$$\varepsilon \left(c^2 - \frac{J_p G}{\vartheta} \right) [f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\}] + \frac{R}{\vartheta} c [f'\{\varepsilon(ct+x)\} + g'\{\varepsilon(ct-x)\}] = 0,$$

wenn $f'\{\dots\}$ als Abkürzung von $df\{\dots\}/d\{\dots\}$ usw. eingeführt wird. Diese Gleichung kann noch weiter vereinfacht werden, falls folgende Beziehung besteht

$$f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\} = \delta [f'\{\varepsilon(ct+x)\} + g'\{\varepsilon(ct-x)\}]$$

mit δ als Konstante. Man erhält dann

$$[f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\}] \left\{ \varepsilon c^2 - \varepsilon \frac{J_p G}{\vartheta} + \delta \frac{R}{\vartheta} c \right\} = 0$$

oder

$$\varepsilon c^2 - \varepsilon \frac{J_D G}{\vartheta} + \delta \frac{R}{\vartheta} c = 0, \quad (2)$$

woraus sich die noch unbekannte Geschwindigkeit c ermitteln lässt.

Diese Vereinfachung wird offenbar durch eine Exponentialfunktion für φ ermöglicht, die dann die Lösung bildet, nämlich

$$\varphi = A e^{i(c t + x + \alpha') \omega / c} + B e^{i(c t - x + \beta') \omega / c}$$

oder

$$\varphi = A e^{i(\omega t + \omega x / c + \alpha)} + B e^{i(\omega t - \omega x / c + \beta)},$$

worin ω die Kreisfrequenz des erregenden Drehmomentes und A, B, α, β die Integrationskonstanten sind. Es wird später noch gezeigt, dass die Lösung die aufzustellenden Randbedingungen befriedigt. Die Konstanten ε und δ in der Gleichung (2) sind dann

$$\varepsilon = \frac{i \omega}{c}, \quad \delta = 1,$$

und die Gleichung (2) wird

$$i \frac{\omega}{c} c^2 - i \frac{\omega}{c} \cdot \frac{J_D G}{\vartheta} + \frac{R}{\vartheta} c = 0$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{J_D G / \vartheta}{1 + R^2 / (\omega^2 \vartheta^2)}} \sqrt{1 + i \frac{R}{\omega \vartheta}}.$$

Der Ausdruck $R / (\omega \vartheta)$ ist immer sehr klein gegen 1, darum lässt sich die Formel der Geschwindigkeit vereinfachen zu

$$c \approx c_r \left(1 + i \frac{R}{2 \omega \vartheta} + \frac{R^2}{8 \omega^2 \vartheta^2} \right) \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 \vartheta^2} \right)^{-1/2}$$

mit

$$c_r = \sqrt{\frac{J_D G}{\vartheta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c erscheint in komplexer Form infolge der Wirkung der Dämpfung R . Der reziproke Wert von c :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_r} (a - i b)$$

enthält zwei Größen

$$a = \left(1 + \frac{R^2}{8 \omega^2 \vartheta^2} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{R}{2 \omega \vartheta},$$

wovon a nur wenig von 1 verschieden und b viel kleiner als 1 und hauptsächlich von der Dämpfung $R / (2 \omega \vartheta)$ bestimmt ist.

Die Lösung für φ wird:

$$\varphi(x, t) = A e^{+b \omega x / c_r} e^{i(\omega t + a \omega x / c_r + \alpha)} + B e^{-b \omega x / c_r} e^{i(\omega t - a \omega x / c_r + \beta)}.$$

Wenn der Ausdruck Impedanz z :

$$z = u + i v = \frac{b \omega}{c_r} + \frac{i a \omega}{c_r}$$

eingeführt wird, wird der Winkelausschlag φ am Ort x zur Zeit t :

$$\varphi(x, t) = A e^{u x} e^{i(\omega t + v x + \alpha)} + B e^{-u x} e^{i(\omega t - v x + \beta)}. \quad (3)$$

Wegen der Dämpfung, die sich im reellen Teil u der Impedanz z ausdrückt, ist es nicht möglich, den Winkelausschlag φ auf eine reine Sinusfunktion zurückzuführen.

2. Das Zweimassensystem mit elastischer Zwischenleitung

An beiden Enden der elastischen Zwischenleitung stehen je eine Masse mit Trägheits- und Reibungsmoment (Figur 1). Auf der einen Masse Θ_1 wirkt noch eine periodische Erregung $M e^{i \omega t}$.

2.1. Randbedingung an der Stelle $x = l$ (Motorseite)

Die Randbedingung lautet

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + J_p G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_l = M e^{i \omega t}.$$

Nach Einsetzen der Gleichung (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\{ -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1 + J_p G \frac{\omega}{c_r} (b + i a) \right\} A e^{b \omega l / c_r} e^{i(\omega t + a \omega l / c_r + \alpha)} \\ & + \left\{ -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1 - J_p G \frac{\omega}{c_r} (b + i a) \right\} B e^{-b \omega l / c_r} e^{i(\omega t - a \omega l / c_r + \beta)} = M e^{i \omega t}. \end{aligned}$$

Werden die Impedanz der Masse: $Z_1 = -\dot{p}_1 + i q_1 = -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1$ und der Profilwert der Zwischenleitung: $k = J_p G$ eingeführt, so erhält man nach Aufheben der Glieder $e^{i \omega t}$ auf den beiden Seiten der Gleichung

$$A e^{i \alpha} (Z_1 + k z) e^{z l} + B e^{i \beta} (Z_1 - k z) e^{-z l} = M. \quad (4)$$

2.2. Randbedingung an der Stelle $x = 0$ (Propellerseite)

Die Bedingung ist hier

$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - J_p G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = 0.$$

Einsetzen der Gleichung (3) ergibt

$$A e^{i\alpha} (Z_0 - k z) + B e^{i\beta} (Z_0 + k z) = 0 \tag{5}$$

mit

$$Z_0 = -\omega^2 \Theta_0 + i \omega R_0 = -\dot{p}_0 + i q_0 .$$

Aus den beiden simultanen Gleichungen (4) und (5) folgen die beiden Unbekannten $A e^{i\alpha}$ und $B e^{i\beta}$ zu

$$A e^{i\alpha} = M(Z_0 + k z) \{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \}^{-1} ,$$

$$B e^{i\beta} = -M(Z_0 - k z) \{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \}^{-1} ,$$

und der Winkelausschlag:

$$\varphi(x, t) = M \left\{ (Z_0 + k z) e^{u x} e^{i(\omega t + v x)} - (Z_0 - k z) e^{-u x} e^{i(\omega t - v x)} \right\} \times \left\{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \right\}^{-1} . \tag{6}$$

Somit ist erwiesen, dass der Lösungsansatz der Exponentialfunktion die Randbedingungen erfüllt.

Die ganze abgeleitete Beziehung lässt sich im folgenden Abschnitt mit Vektoren noch viel deutlicher darstellen.

3. Vektorielle Darstellungen

Die Randbedingung auf der Propellerseite, Gleichung (5), lässt sich unter Einführung der Vektoren $A = A e^{i\alpha}$ und $B = B e^{i\beta}$ umformen zu¹⁾

$$Z_0 (A + B) - k z (A - B) = 0 . \tag{7}$$

Zur vektoriellen Darstellung dieser Gleichung nimmt man zunächst einen Einheitsvektor

$$A_0 + B_0 = \frac{A + B}{|A + B|}$$

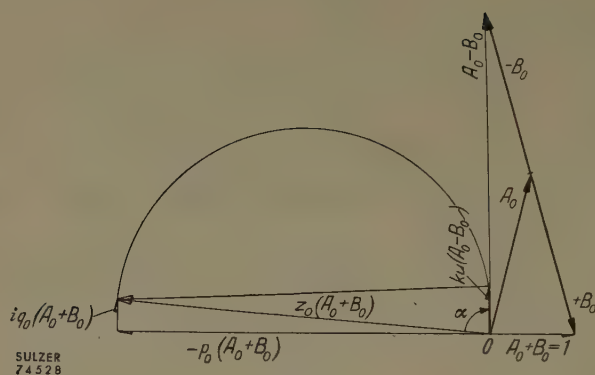
an und bildet aus ihm den Vektor $Z_0 (A_0 + B_0)$ (vgl. Figur 3). Mit diesem als Durchmesser zeichnet man einen Halbkreis, dann ist die vom Anfangspunkt O unter Winkel α [ctg $\alpha = b/a = R/(2 \omega \vartheta)$] gezogene Sehne der Vektor $k u (A_0 - B_0)$, woraus sich der Vektor $(A_0 - B_0)$ bestimmen lässt. Aus $(A_0 + B_0)$ und $(A_0 - B_0)$ können die beiden Vektoren A_0 und B_0 konstruiert werden (siehe Figur 3).

Die Randbedingung auf der Motorseite aus Gleichung (4)

$$\{ Z_1 + k z \} A e^{z l} + \{ Z_1 - k z \} B e^{-z l} = M \tag{8}$$

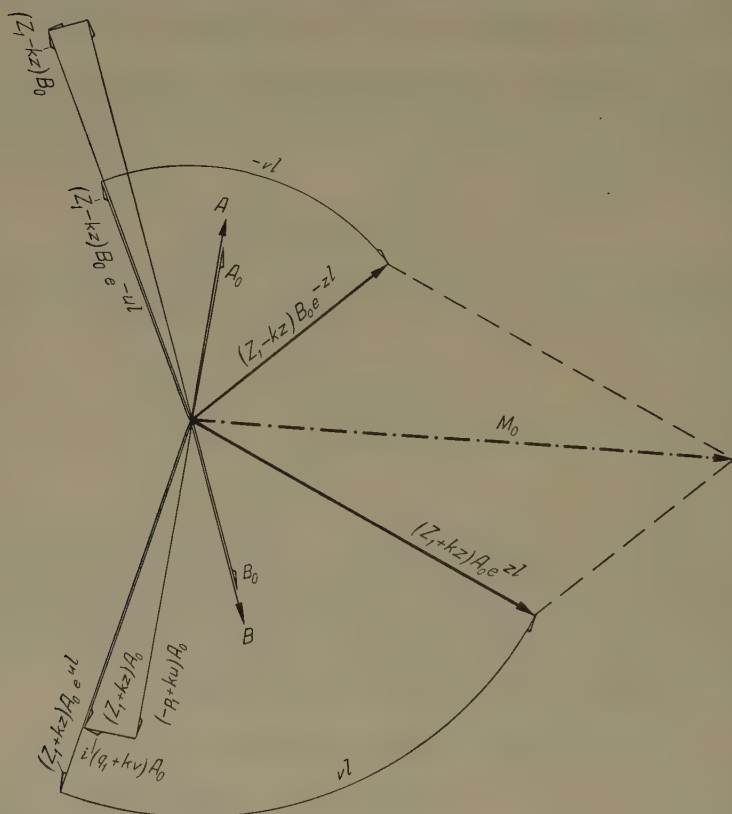
kann dann von den beiden Vektoren A_0 und B_0 ausgehend dargestellt werden.

¹⁾ O. Lutz, *Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenmaschinen*, Ber. Labor. Verbrennungskraftmaschinen, Technische Hochschule Stuttgart, Heft 3 (1934).



Figur 3

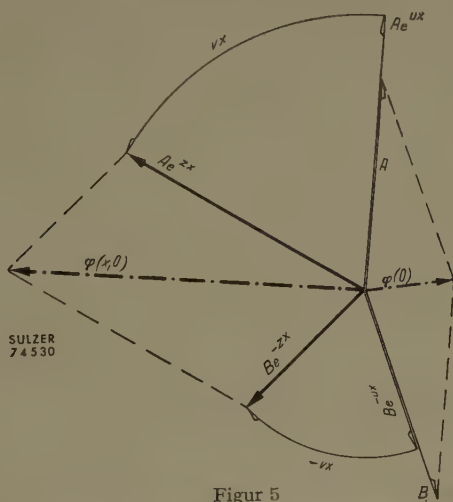
Bestimmung der Vektoren A_0 und B_0 aus der Randbedingung auf der Propellerseite.



Figur 4

Bestimmung des Vektors M_0 aus den beiden Vektoren A_0 und B_0 .

In Figur 4 wird zunächst aus A_0 der Vektor $(Z_1 + k z) A_0$ konstruiert und dann skalar mit $e^{u l}$ multipliziert. Nach Drehen des neuen Vektors um den Winkel $v l$ kommt der Vektor $(Z_1 + k z) A_0 e^{z l}$ zustande. Analog bildet man aus Vektor B_0 der Reihenfolge nach die Vektoren $(Z_1 - k z) B_0$, $(Z_1 - k z) B_0 e^{-u l}$, $(Z_1 - k z) B_0 e^{-z l}$. Aus den beiden Vektoren $(Z_1 + k z) A_0 e^{z l}$ und $(Z_1 - k z) B_0 e^{-z l}$



Figur 5

Bestimmung des Winkelausschlages φ für eine beliebige Stelle x zur Zeit $t = 0$.

lässt sich die Resultierende M_0 bilden. Nach Gleichung (8) besteht dann die Beziehung

$$M_0 = M \frac{A_0}{A} = M \frac{B_0}{B}$$

oder umgekehrt

$$A = A_0 \frac{M}{M_0}, \quad B = B_0 \frac{M}{M_0}. \quad (9)$$

Somit sind die beiden Vektoren A und B bekannt.

Für irgendeine Stelle x lässt sich der Winkelausschlag φ zur Zeit t gemäss Gleichung (3) wie folgt ermitteln. In Figur 5 geht man von den Vektoren A und B aus und bildet $A e^{u x}$ und $B e^{-u x}$, diese werden um den Winkel $+v x$ bzw. $-v x$ gedreht und deren Resultierende gebildet. Dann ist der neue Vektor gleich dem Winkelausschlag φ an der Stelle x zur Zeit $t = 0$:

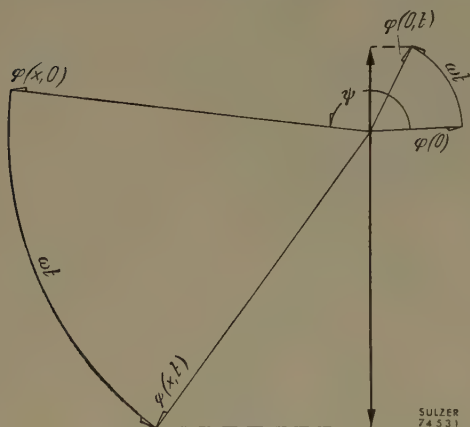
$$\varphi(x, t = 0) = A e^{x x} + B e^{-x x}.$$

Nach weiterer Drehung dieses Vektors um den Winkel ωt erhält man den Ausschlag zur Zeit t : $\varphi(x, t) = \varphi(x, 0) e^{i \omega t}$ (vgl. Figur 6).

Da das erregende Drehmoment $M \sin \omega t$ tatsächlich nur dem imaginären Teil von $M e^{i \omega t}$ entspricht, ist der wirkliche Ausschlag auch nur durch den

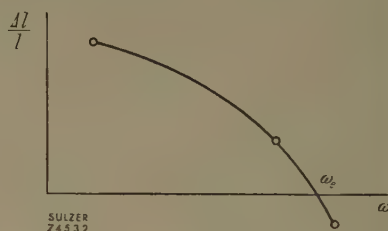
imaginären Teil von $\varphi(x, t)$ dargestellt, also nur durch dessen vertikale Komponente, wie in Figur 6 gezeigt. Der Winkelausschlag an der Stelle $x = 0$ zur Zeit t : $\varphi(0, t) = \varphi(0) e^{i\omega t}$ bzw. $\varphi(0) \sin \omega t$ lässt sich auch zeichnen. Der Winkel ψ zwischen den Vektoren $\varphi(x, 0)$ und $\varphi(0)$ stellt ihre Phasenverschiebung dar. Im dämpfungsfreien Fall ist $\psi = 0$ oder π .

Fallen die beiden Vektoren $(Z_1 + k z) A_0 e^{z l}$ und $(Z_1 - k z) B_0 e^{-z l}$ in Figur 4 in gleiche Richtung, ist M_0 am grössten, dann sind A, B und damit φ am kleinsten. Das heisst, das System wird sehr schwach zum Schwingen erregt.



Figur 6

Die Winkelausschläge $\varphi(x, t)$ und $\varphi(0, t)$.



Figur 7

Die Restgliedkurve $\Delta l/l = f(\omega)$.

Ein Resonanzfall liegt aber vor, wenn die beiden erwähnten Vektorkomponenten von M_0 entgegengesetzt liegen. Somit lässt sich die Eigenfrequenz auf folgendem Weg bestimmen. Zunächst wird ein passendes ω als Kreisfrequenz gewählt und diese beiden Vektoren konstruiert. Man ermittelt den nötigen Winkel $\nu \Delta l$, um sie in entgegengesetzte Richtungen zu bringen. Für eine gewisse Länge $l + \Delta l$ der Leitung des Schwingungssystems ist die gewählte Kreisfrequenz ω bereits die Eigenkreisfrequenz. Für eine Länge l wird die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_e = \omega \left(\frac{l + \Delta l}{l} \right)^n$$

sein, wobei der Exponent n zwischen $1/2$ und 1 liegt und noch abzuschätzen ist. Sind die Massen Θ_0 und Θ_1 überwiegend gross, so ist n ungefähr gleich $1/2$, sonst wird n bei sehr langer Zwischenleitung nahe 1 liegen. Nach Abschätzung von n erhält man eine neue Kreisfrequenz und wiederholt mit ihr den ganzen Vorgang nochmals, und so weiter. Die so gefundene Grösse $\Delta l/l$ wird über ω zu einer Kurve aufgetragen, deren Schnittpunkt mit der ω -Achse die Eigenfrequenz darstellt (siehe Figur 7).

4. Mehrmassensystem mit Erregung an nur einer Endmasse

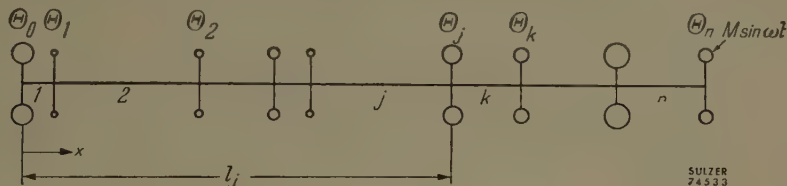
Figur 8 stellt ein $(n+1)$ -Massensystem dar. Ein Erregungsmoment $M \sin \omega t$ wirkt auf die Endmasse n . Für eine beliebige Masse j mit Massenträgheitsmoment Θ_j gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$\Theta_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{pj} G \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - J_{pk} G \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0$$

mit

$$\varphi_j = A_j e^{u_j x} e^{i(\omega t + v_j x + \alpha_j)} + B_j e^{-u_j x} e^{i(\omega t - v_j x + \beta_j)}$$

für den linken Leitungsteil j ;



Figur 8

$(n+1)$ -Massensystem mit Erregung an der Endmasse n .

$$\varphi_k = A_k e^{u_k x} e^{i(\omega t + v_k x + \alpha_k)} + B_k e^{-u_k x} e^{i(\omega t - v_k x + \beta_k)}$$

für den rechten Leitungsteil k ;

R_j = Reibungsbeiwert der Masse j ;

J_{pj} = polares Querschnittsträgheitsmoment im Leitungsteil j ;

J_{pk} = polares Querschnittsträgheitsmoment im Leitungsteil k .

Aus φ_j und φ_k werden die Ableitungen nach x und t gebildet und in die obige Differentialgleichung eingesetzt. Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung $\varphi = \varphi_j = \varphi_k$ bei $x = l_j$ erhält man

$$\frac{1}{k_k |z_k|^2} \bar{z}_k \{ (Z_j + k z_j) A_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k z_j) B_j e^{-z_j l_j} \} = A_k e^{z_k l_j} - B_k e^{-z_k l_j}$$

und

$$A_j e^{z_j l_j} + B_j e^{-z_j l_j} = A_k e^{z_k l_j} + B_k e^{-z_k l_j},$$

wobei $\bar{z}_k = u_k - i v_k$ die konjugierte Impedanz von z_k ist. Die beiden Gleichungen stellen die Randbedingung der Masse j dar.

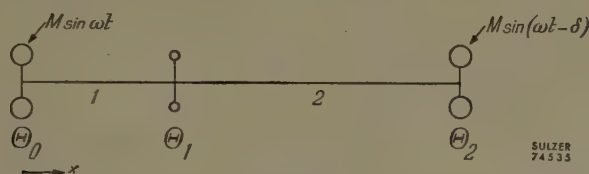
Wären $A_j e^{z_j l_j}$ und $B_j e^{-z_j l_j}$ bekannt, dann könnten $A_k e^{z_k l_j}$ und $B_k e^{-z_k l_j}$ aus dieser Randbedingung bestimmt werden. In Figur 9 wird gezeigt, dass aus $A_j e^{z_j l_j}$ und $B_j e^{-z_j l_j}$ die Vektoren $(Z_j + k_j z_j) A_j e^{z_j l_j}$ und $(Z_j - k_j z_j) B_j e^{-z_j l_j}$ sich bilden lassen. Multipliziert man deren Resultierende (V) mit

$$\frac{1}{k_k |z_k|^2} u_k \quad \text{bzw.} \quad -i \frac{1}{k_k |z_k|^2} v_k,$$

womit der Winkelausschlag φ an dieser Stelle nach Gleichung (3) bestimmt werden kann.

5. Dreimassensystem mit Erregung an beiden Endmassen

Wenn in einem Mehrmassensystem mehr als eine Masse durch äussere Momente erregt wird, dann kann man keine Lösung in analytischer Form erbringen. Es müssen die zeitlichen Fortpflanzungswege der von den erregenden Impulsen ausgelösten Wellen verfolgt werden, bis stationärer Zustand erreicht wird, das heisst, bis sich überall stehende Wellen bilden. Diese Fortpflanzungswege im (x, t) -Diagramm heissen Charakteristiken.



Figur 10

Dreimassensystem mit Erregung an beiden Endmassen.

In Figur 10 wird ein Dreimassensystem gezeigt, an dessen beiden Endmassen die erregenden Drehmomente wirken. Man fängt mit dem Anlaufvorgang an. Von den beiden Endmassen 0 und 2 gehen die erregenden Impulse als wandernde Wellen nach der Masse 1 hin. Die von der Masse 0 ausgehende Welle besteht jetzt aus dem hingehenden Teil allein, also

$$\varphi = B_1 e^{-u_1 x} e^{i(\omega t - v_1 x + \beta_1)}$$

und wird durch die Randbedingung:

$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - J_{p1} G \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M e^{i\omega t}$$

bestimmt. Nach Einsetzen des Ausdruckes φ erhält man

$$B_1 = -M (-Z_0 - k_1 z_1)^{-1}. \quad (10)$$

Diese Beziehung stellt zugleich den momentanen maximalen Schwingungsaus-
schlag der Masse 0, erregt durch das Moment $M e^{i\omega t}$, dar. Es sei angenommen,
die Welle B_1 erreiche die Masse 1 früher als die von der Masse 2 ausgehende und
besitze bei ihrer Ankunft in 1 den Wert:

$$\varphi = B_1 e^{-u_1 l_1} e^{i(\omega t - v_1 l_1 + \beta_1)}.$$

Diese Welle kann nur teilweise über die Masse 1 auf den Leitungsteil 2 über-
gehen, während der übrige Teil in den Leitungsteil 1 zurückreflektiert wird.

Diese beiden Teile sind

$$B_2 e^{-u_2 l_1} e^{i(\omega t - v_2 l_1 + \beta_2)} \quad \text{und} \quad A_1 e^{u_1 l_1} e^{i(\omega t + v_1 l_1 + \alpha_1)}$$

und müssen mit der ursprünglichen Welle folgender Randbedingung an der Masse 1 genügen:

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p1} G \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - J_{p2} G \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0.$$

Man setzt

$$\varphi_1 = A_1 e^{u_1 l_1} e^{i(\omega t + v_1 l_1 + \alpha_1)} + B_1 e^{-u_1 l_1} e^{i(\omega t - v_1 l_1 + \beta_1)}$$

und

$$\varphi_2 = B_2 e^{-u_2 l_1} e^{i(\omega t - v_2 l_1 + \beta_2)}$$

in die Differentialgleichung ein und erhält

$$(Z_1 + k_1 z_1) A_1 e^{z_1 l_1} + (Z_1 - k_1 z_1) B_1 e^{-z_1 l_1} = k_2 z_2 (-B_2 e^{-z_2 l_1}).$$

Wird das Glied $B_2 e^{-z_2 l_1}$ aus dieser Gleichung und der Kontinuitätsgleichung

$$A_1 e^{z_1 l_1} + B_1 e^{-z_1 l_1} = B_2 e^{-z_2 l_1}$$

eliminiert, so ergibt sich

$$A_1 e^{z_1 l_1} = \frac{Z_1 - k_1 z_1 + k_2 z_2}{-Z_1 - k_1 z_1 - k_2 z_2} B_1 e^{-z_1 l_1}. \quad (11)$$

Figur 11 veranschaulicht die Konstruktion der beiden Wellen $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_2 e^{-z_2 l_1}$ aus dem erregenden Drehmoment M . Die Nummern im Kreis verfolgen den Vorgang.

1. Gemäss Gleichung (10) ergibt sich B_1 aus $-M$.
2. Aus B_1 wird $B_1 e^{-z_1 l_1}$ gezeichnet.
3. Aus $B_1 e^{-z_1 l_1}$ geht $(Z_1 - k_1 z_1 + k_2 z_2) B_1 e^{-z_1 l_1}$ hervor.
4. Gemäss Gleichung (11) ist der Vektor $(-Z_1 - k_1 z_1 - k_2 z_2) A_1 e^{z_1 l_1}$ bekannt. Damit können seine beiden Komponenten

$$(p_1 - k_1 u_1 - k_2 u_2) A_1 e^{z_1 l_1} \quad \text{und} \quad i(-q_1 - k_1 v_1 - k_2 v_2) A_1 e^{z_1 l_1}$$

konstruiert werden, woraus $A_1 e^{z_1 l_1}$ bestimmbar ist.

5. Die Vektoren $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_1 e^{-z_1 l_1}$ addieren sich schliesslich zu $B_2 e^{-z_2 l_1}$.

Die Welle $B_2 e^{-z_2 l_1}$ wandert nach der Masse 2 fort, trifft unterwegs die von dieser ausgehende Welle

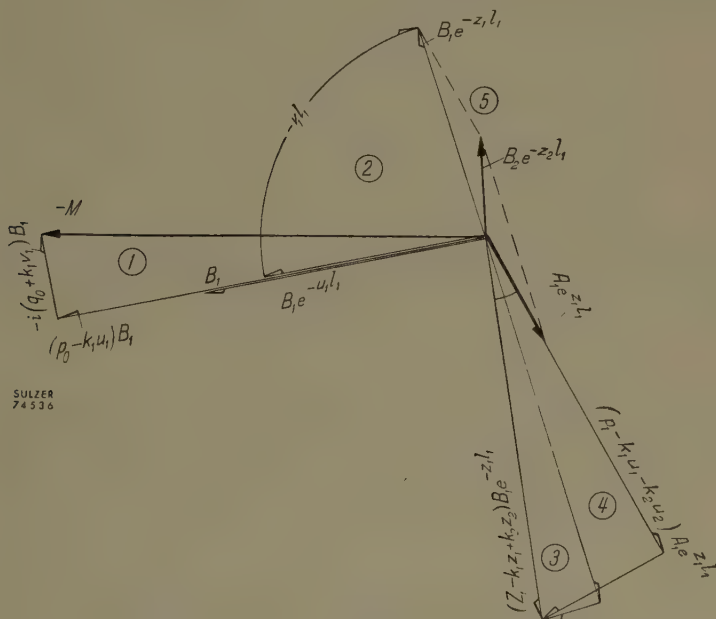
$$\varphi_2 = \frac{-M e^{-i\delta}}{-Z_2 - k_2 z_2} e^{u_2 x} e^{i(\omega t + v_2 x)} \quad [\text{vgl. Gleichung (10)}],$$

kreuzt sie, erreicht dann die Masse 2 um die Zeit τ und wird als Welle $A_2 e^{z_2 l_2} e^{i\omega\tau}$ reflektiert. Die Randbedingung ist hierbei

$$\Theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p2} G \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M e^{i(\omega t - \delta)}$$

mit

$$\varphi = A_2 e^{z_2 x} e^{i\omega t} + B_2 e^{-z_2 x} e^{i\omega t}, \quad x = l_2 \quad \text{und} \quad t = \tau.$$



Figur 11

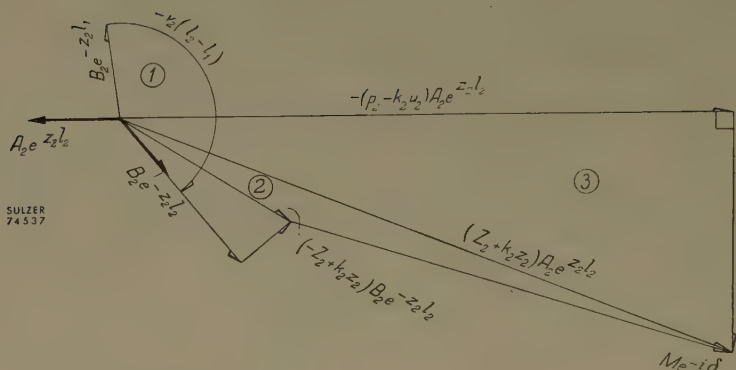
Konstruktion der beiden Vektoren $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_2 e^{-z_2 l_1}$ aus dem erregenden Drehmoment M .

Nach Einführung des Ausdruckes φ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$(-Z_2 + k_2 z_2) B_2 e^{-z_2 l_2} + M e^{-i\delta} = (Z_2 + k_2 z_2) A_2 e^{z_2 l_2}. \quad (12)$$

Der Vorgang der Konstruktion von $A_2 e^{z_2 l_2}$ aus $M e^{-i\delta}$ und $B_2 e^{-z_2 l_2}$ wird in Figur 12 gezeigt.

1. Aus $B_2 e^{-z_2 l_1}$ (von Figur 11 übernommen) wird $B_2 e^{-z_2 l_2}$ konstruiert.
2. Gleichung (12) lässt sich dann darstellen, womit $(Z_2 + k_2 z_2) A_2 e^{z_2 l_2}$ bekannt wird.
3. Aus diesem Vektor findet man $(-p_2 + k_2 u_2) A_2 e^{z_2 l_2}$ und weiter $A_2 e^{z_2 l_2}$.



Figur 12

Konstruktion des Vektors $A_2 e^{z_2 l_2}$ aus $M e^{-i\delta}$ und $B_2 e^{-z_2 l_2}$.

Figur 13a stellt die Fortpflanzungswege oder Charakteristiken der Wellen im (x, t) -Diagramm dar. Die Wege sind in jedem Leitungsteil gerade Linien, ihre Neigung bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \left(\frac{c_r}{a} \right)_j \quad \text{mit } j = 1, 2.$$

Die Wege erfahren eine Knickung, wo sie durch die Mittelmasse 1 gehen. In Figur 13b werden die Amplituden der Wellen in logarithmischem Maßstab dargestellt, zum Beispiel für Welle B:

$$\ln(B e^{-u x}) = \ln B + \ln e^{-u x} = \ln B - u x.$$

Diese Kurven sind wieder Gerade mit Neigungen $\operatorname{tg} \beta = -u$ für die hinlaufenden und $\operatorname{tg} \beta = +u$ für die rücklaufenden Wellen. Für irgendeine Stelle x kann somit die Wellenamplitude abgelesen werden. Sie nimmt mit zunehmendem Wege infolge der Dämpfung b ab.

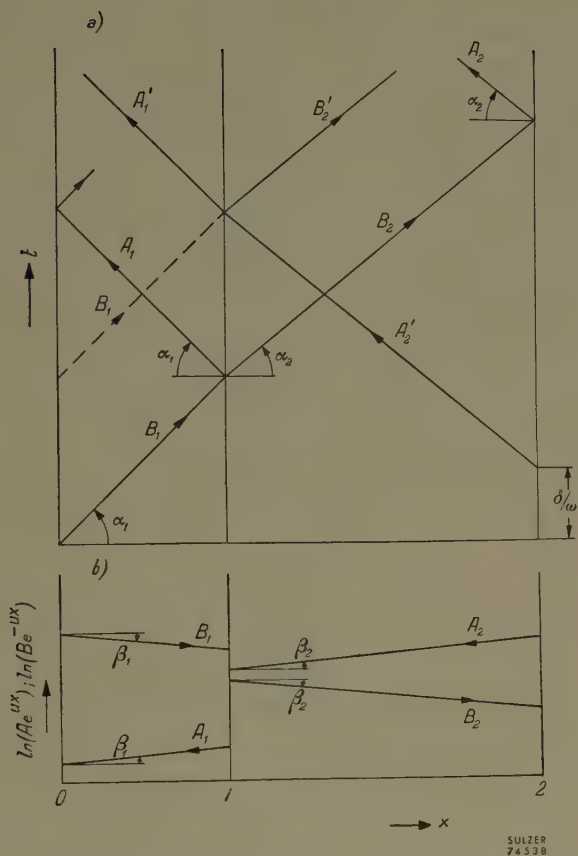
Die oben behandelten Wellen B_1 , A_1 , B_2 und A_2 sind bereits in Figur 13 aufgezeichnet.

Nun kommt man auf die von der Masse 2 ausgelöste Welle A'_2 zurück. Beim Erreichen der Masse 1 hat sie den Wert

$$\frac{-M e^{-i\delta}}{-Z_2 - k_2 z_2} e^{z_2 l_1} e^{i\omega t}.$$

Sie kreuzt hier die von der Masse 0 kommende Welle $B_1 e^{-z_1 l_1} e^{i\omega t}$ und wandert auf den Leitungsteil 1 über, mit veränderter Stärke und unter gleichzeitiger Reflexion. Die beiden neu entstehenden Wellen A'_1 und B'_2 lassen sich aus der Beziehung:

$$\varphi_1 = A'_1 e^{z_1 l_1} e^{i\omega t} + B_1 e^{-z_1 l_1} e^{i\omega t}$$



Figur 13

a Wellenplan im (x, t) -Diagramm. b Abhängigkeit der Amplituden der Wellen mit dem Weg x .

und

$$\varphi_2 = \frac{-M}{-Z_2 - k_2 z_2} e^{z_2 t_1} e^{i\omega(t-\delta)} + B_2' e^{-z_2 t_1} e^{i\omega t}$$

gemäss der Randbedingung an der Masse 1 aus den Wellen B_1 und A_2' ermitteln.

Auf diese Weise können die weiteren Wellen verfolgt werden, bis überall stehende Wellen entstehen.

6. Schwingungssystem mit Verzweigung

Figur 14 zeigt ein Dreimassensystem mit einer angehängten Masse P an der Mittelmasse O durch eine Leitung 3. Man stelle sich etwa vor, die beiden Endmassen M und M' seien zwei Dieselmotoren, welche durch ein gemeinsames

Getriebe O den Propeller P antreiben. An der Masse O müssen folgende Randbedingungen befriedigt werden:

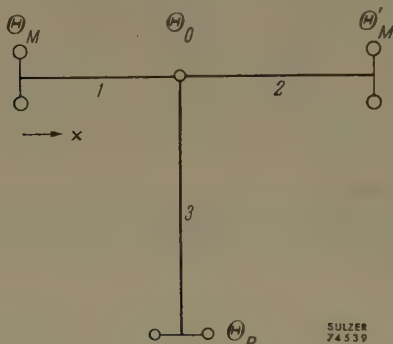
$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p1} G \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - J_{p2} G \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - J_{p3} G \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \quad \text{bei } x = l_1$$

und

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

mit

$$q_j = A_j e^{z_j l_1} e^{i\omega t} + B_j e^{-z_j l_1} e^{i\omega t} \quad (j = 1, 2, 3).$$



Figur 14

Dreimassensystem mit einer angehängten Masse.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & (Z_0 + k_1 z_1) A_1 e^{z_1 l_1} + (Z_0 - k_1 z_1) B_1 e^{-z_1 l_1} \\ & = k_2 z_2 (A_2 e^{z_2 l_1} - B_2 e^{-z_2 l_1}) + k_3 z_3 (A_3 e^{z_3 l_1} - B_3 e^{-z_3 l_1}). \end{aligned}$$

Aus den drei nach der Masse O wandernden Wellen B_1 , A_2 und A_3 können die reflektierten Wellen A_1 , B_2 und B_3 gemäss dieser Gleichung bestimmt werden. Man fängt ebenfalls mit dem Anlaufvorgang an. Es gehen jetzt die Wellen B_1 und A_2 von der Masse M bzw. M' nach derjenigen O hin, während die Welle A_3 in der Leitung 3 noch fehlt. Erst nachdem eine der beiden vorhergenannten Wellen die Masse O erreicht hat, entstehen im Leitungsteil 1, 2 und 3 die Wellen A_1 , B_2 bzw. B_3 . Wenn die Welle B_3 am Propeller P ankommt, bildet sich als ihre Reflexion die Welle A_3 . Die weitere Behandlung der Wellen erfolgt sinngemäss nach demselben Prinzip wie im vorigen Abschnitt.

7. Zerlegung eines Schwingungssystems in einzelne Teilsysteme

Eine Schiffsdieselanlage wird hier als Beispiel gewählt. Bei der Berechnung der Torsionsschwingungen der Kurbelwelle ist es üblich, ihre Massen und Ela-

stizitäten getrennt zu behandeln. Die Kurbelwelle wird nämlich in einzelne individuelle Massen zerlegt und die dazwischenliegenden elastischen Teile als massenlos und dämpfungsfrei angesehen. Anders ist es in einer langen Leitung, welche die Dieselmachine mit dem Propeller verbindet. Ihre Masse muss dann als kontinuierlich verteilt und mit Elastizität und Dämpfung behaftet behandelt werden. Für sie kommt die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Methode zur Anwendung und für die Kurbelwelle die wesentlich einfacheren wohlbekannten Verfahren von HOLZER, BRABEC und andern. Es ist aber schwer, in einem einzigen System zwei Teile nach zwei verschiedenen Methoden zu behandeln. Man sieht sich daher vor die Aufgabe gestellt, die beiden Teile zu trennen.

In Figur 15 stellen Θ_0 bis Θ_n die Dieselmachine dar, Θ_{n+1} das Schwungrad und Θ_{n+m} den Propeller. Zwischen den beiden letzteren liegt die lange Leitung mit lauter angebauten Massen Θ_{n+2} , Θ_{n+3} , ..., Θ_{n+m-1} . Das Schwungrad trennt das System also in zwei Teile verschiedener Natur. Für die $n + m + 1$ Massen lassen sich folgende Bewegungsgleichungen anschreiben:

$$\Theta_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_0} + R_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_0} - J_{p1} G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{l_0} = 0, \quad (0)$$

$$\Theta_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_1} + R_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_1} + J_{p1} G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{l_1} - J_{p2} G \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)_{l_1} = M_v e^{i(\omega t + \delta_1)}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_n} + R_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_n} \\ + J_{pn} G \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right)_{l_n} - J_{p n+1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_n} - M_v e^{i(\omega t + \delta_n)}, \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} \\ + J_{p n+1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} - J_{p n+2} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+2}} + R_{n+2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+2}} \\ + J_{p n+2} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+2}} - J_{p n+3} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+3}}{\partial x} \right)_{l_{n+2}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+m-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+m-1}} + R_{n+m-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+m-1}} \\ + J_{p n+m-1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m-1}}{\partial x} \right)_{l_{n+m-1}} - J_{p n+m} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x} \right)_{l_{n+m-1}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+m-1)$$

$$\Theta_{n+m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+m}} + R_{n+m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+m}} + J_{p n+m} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x} \right)_{l_{n+m}} = 0, \quad (n+m)$$

wobei $M_p e^{i(\omega t + \delta_j)}$ das erregende Moment auf die Masse Θ_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) bedeutet und ν seine Ordnungszahl. Spaltet man die Gleichung $(n+1)$ in die zwei folgenden

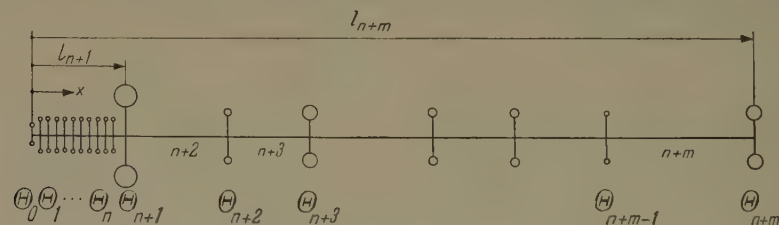
$$\begin{aligned} \Theta_{n+1}^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1}^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} + J_{p_{n+1}} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} &= 0, \quad (n+1)^* \\ \Theta_{n+1}^{**} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1}^{**} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} - J_{p_{n+2}} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} &= 0, \quad (n+1)^{**} \end{aligned}$$

wobei

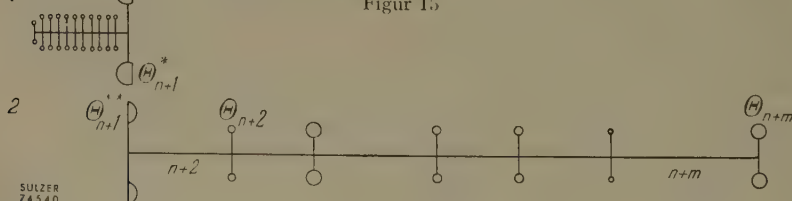
$$\Theta_{n+1}^* + \Theta_{n+1}^{**} = \Theta_{n+1} \quad \text{und} \quad R_{n+1}^* + R_{n+1}^{**} = R_{n+1}$$

sind, so lässt sich das ganze Gleichungssystem in zwei Gruppen zerlegen. Die erste Gruppe umfasst die Gleichungen (0), (1), ..., (n) und $(n+1)^*$, die zweite die Gleichungen $(n+1)^{**}$, $(n+2)$, ..., $(n+m)$. Es ist ersichtlich, dass die erste Gruppe eine einfache Dieselmachine mit dem Schwungrad Θ_{n+1}^* darstellt und die zweite das m -Massen-System Θ_{n+1}^{**} , Θ_{n+2} , ..., Θ_{n+m} . In diesem Sinne kann man sich das ursprüngliche System in die zwei entsprechenden Teilsysteme (siehe Figur 16) zerlegt denken. Damit die Schwingungen dann noch unverändert bleiben, muss die Aufteilung von Θ_{n+1} und R_{n+1} nach einer eindeutigen Regel erfolgen.

Das erste Teilsystem führt eine erzwungene Schwingung aus, welche durch $M_p e^{i(\omega t + \delta_j)}$ erregt wird. Somit ist ω die Kreisfrequenz dieser erzwungenen



Figur 15

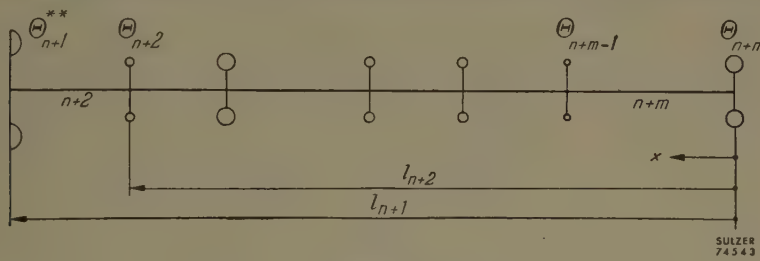


Figur 16

Figur 15. – Das $(n+1+m)$ -Massen-System stellt eine Schiffsdieselanlage dar; Θ_0 bis Θ_n die Dieselmachine, Θ_{n+1} das Schwungrad, Θ_{n+1}^{**} den Propeller und die Leitung zwischen Θ_{n+1} und Θ_{n+m} die Zwischenleitung.

Figur 16. – Das System wird in zwei Gruppen zerlegt: Θ_0 bis Θ_{n+1}^* , die Dieselmachine mit einem Schwungrad, und Θ_{n+1}^{**} bis Θ_{n+m} , die Zwischenleitung mit m Massen.

Schwingung. Auf das zweite Teilsystem wirkt keine äussere Kraft, so schwingt es frei mit seiner Eigenfrequenz. Da das zweite System in der Tat mit dem ersten fest verbunden ist, muss jenes notwendig mit der gleichen Kreisfrequenz schwingen wie dieses. Deshalb ist ω zugleich die Eigenkreisfrequenz des zweiten Systems. Die Aufgabe besteht also darin, eine Masse Θ_{n+1}^{**} und ihre Dämpfung R_{n+1}^{**} zu bestimmen, mit welcher das zweite System eine Eigenkreisfrequenz ω erwerben kann. Ist dies getan, so kann das Teilschwingrad Θ_{n+1}^* für das erste System aus $\Theta_{n+1}^* = \Theta_{n+1} - \Theta_{n+1}^{**}$ und dessen Dämpfung aus $R_{n+1}^* = R_{n+1} - R_{n+1}^{**}$ bestimmt werden. Da dieses Teilsystem sich mit irgendeinem der üblichen Verfahren behandeln lässt, ist der Schwingungsausgang von Θ_{n+1}^* leicht zu be-



Figur 17
Die Zwischenleitung. Von ihrem rechten Ende aus wird x gerechnet.

stimmen. Darauf wird nicht weiter eingegangen. Dieser Ausschlag wird auf die Masse Θ_{n+1}^{**} des zweiten Systemes übertragen, womit die Randbedingung für dieses bestimmt ist.

Im folgenden wird die Bestimmung von Θ_{n+1}^{**} und R_{n+1}^{**} erörtert. Um die Berechnung zu erleichtern, fängt man bei der Endmasse Θ_{n+m} an, von wo aus längs x gerechnet wird (siehe Figur 17), genau so wie im Abschnitt 4 beschrieben. Nach Annahme des Einheitsvektors $A_{(n-m)_0} + B_{(n+m)_0}$ an der Masse Θ_{n+m} können über die Massen $\Theta_{n+m-1}, \Theta_{n+m-2}, \dots, \Theta_{n+2}$ bis zur Masse Θ_{n+1}^{**} die Vektoren $A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}}$ und $B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}$ bestimmt werden. Für die Masse Θ_{n+1}^{**} gilt gemäss Gleichung (7) die Randbedingung

$$\begin{aligned} & -Z_{n+1}^{**} (A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}} + B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}) \\ & = k_{n+2} z_{n+2} (A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}} - B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}) \end{aligned}$$

oder, abgekürzt geschrieben,

$$-Z_{n+1}^{**} (A + B) = k_{n+2} z_{n+2} (A - B).$$

Figur 18 stellt diese Gleichung dar. Man bildet aus A und B die Vektoren $A + B$ und $A - B$. Aus dem letzteren lässt sich der Vektor $k_{n+2} z_{n+2} (A - B)$ konstruieren, von dessen Spitze eine Senkrechte auf den Vektor $A + B$ gerichtet wird.

Dann sind die beiden Strecken

$$\vec{y} = p_{n+1}^{**} (A + B) = \omega^2 \Theta_{n+1}^{**} (A + B)$$

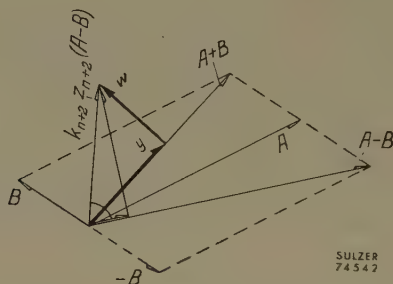
und

$$\vec{w} = -i q_{n+1}^{**} (A + B) = -i \omega R_{n+1}^{**} (A + B)$$

und damit

$$\Theta_{n+1}^{**} = \vec{y} \{ \omega^2 (A + B) \}^{-1} \quad \text{und} \quad R_{n+1}^{**} = i \vec{w} \{ \omega (A + B) \}^{-1}.$$

Die Aufgabe der Zerlegung der Masse Θ_{n+1} und ihrer Dämpfung R_{n+1} ist damit gelöst.



Figur 18

Bestimmung der Grössen Θ_{n+1}^{**} und R_{n+1}^{**} aus den beiden Vektoren $A = A_{(n+2)0} e^{z_{n+2} l_{n+1}}$ und $B = B_{(n+2)0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}$.

Θ_{n+1}^{**} kann negativ sein, wenn \vec{y} und $A + B$ entgegengerichtet sind. Dagegen bleibt die Dämpfung R_{n+1}^{**} immer negativ. Der Ausdruck $i \omega R_{n+1}^{**} \varphi_{n+1}$ stellt dann das vom ersten auf das zweite System übertragene Drehmoment dar. Dieses dient dazu, um die Energiebilanz im zweiten System aufrechtzuerhalten, da seine Dämpfungen mechanische Energie fortwährend vernichten.

Das Ergebnis kann noch anders gedeutet werden: Der Teil rechts vom Schwungrad lässt sich vollständig auf eine einzige Masse mit einer einzigen Dämpfung reduzieren.

8. Torsionsschwingungen ohne Dämpfung

Eine Nockenwelle trägt sehr viel kleine Schwungmassen. Um ihre Eigenfrequenz zu bestimmen, genügt es in den meisten Fällen, die Dämpfungen ausser acht zu lassen. In Figur 19 ist eine Nockenwelle mit Antrieb in der Mitte dargestellt. Unter Weglassen ihrer Dämpfungsglieder sind die Randbedingungen für $x = 0$ gemäss Gleichung (7):

$$J_{p1} G \frac{\omega}{c_1} (A_1 - B_1) = 0$$

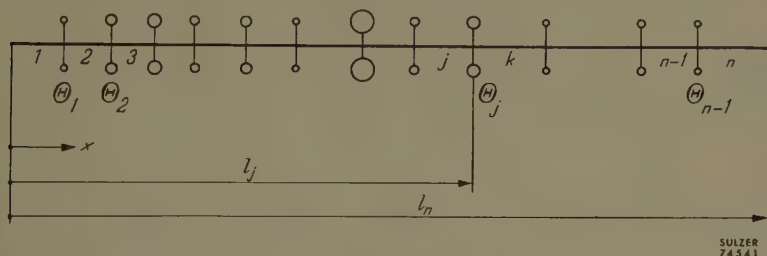
und für eine beliebige Masse j nach Abschnitt 4:

$$\frac{c_k J_{pj}}{c_j J_{pk}} \left\{ \left(i \frac{\omega \Theta_j c_j}{J_{pj} G} + 1 \right) A_j e^{i\omega l_j/c_j} - \left(-i \frac{\omega \Theta_j c_j}{J_{pj} G} + 1 \right) B_j e^{-i\omega l_j/c_j} \right\} \\ = A_k e^{i\omega l_j/c_k} - B_k e^{-i\omega l_j/c_k}$$

und

$$A_j e^{i\omega l_j/c_j} + B_j e^{-i\omega l_j/c_j} = A_k e^{i\omega l_j/c_k} + B_k e^{-i\omega l_j/c_k}.$$

Die Berechnung fängt beim Intervall 1 an, wo $A_1 = B_1$ für $x = 0$ ist. Man wählt ein passendes ω als die gesuchte Eigenkreisfrequenz und nimmt einen beliebigen Wert für die Vektoren $A_1 = B_1$ an. Bis $x = l_1$ gehen sie über in



Figur 19

Das $(n-1)$ -Massen-System stellt eine Nockenwelle dar.

$A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ bzw. $B_1 e^{-i\omega l_1/c_1}$ (siehe Figur 20). Man bildet am Vektor $A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\tan \psi = \omega \Theta_1 c_1 / J_{p1} G$; seine Hypotenuse ist dann der Vektor

$$\left(i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) A_1 e^{i\omega l_1/c_1}.$$

Auf gleiche Weise lässt sich

$$\left(-i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) B_1 e^{-i\omega l_1/c_1}$$

konstruieren. Subtrahiert man diesen von jenem und multipliziert ihr Resultat mit $c_2 J_{p1} / c_1 J_{p2}$, so kommt der Vektor

$$A_2 e^{i\omega l_1/c_2} - B_2 e^{-i\omega l_1/c_2}$$

zustande. Die Kontinuitätsgleichung liefert ausserdem den Vektor

$$A_2 e^{i\omega l_1/c_2} + B_2 e^{-i\omega l_1/c_2},$$

da er gleich

$$A_1 e^{i\omega l_1/c_1} + B_1 e^{-i\omega l_1/c_1}$$

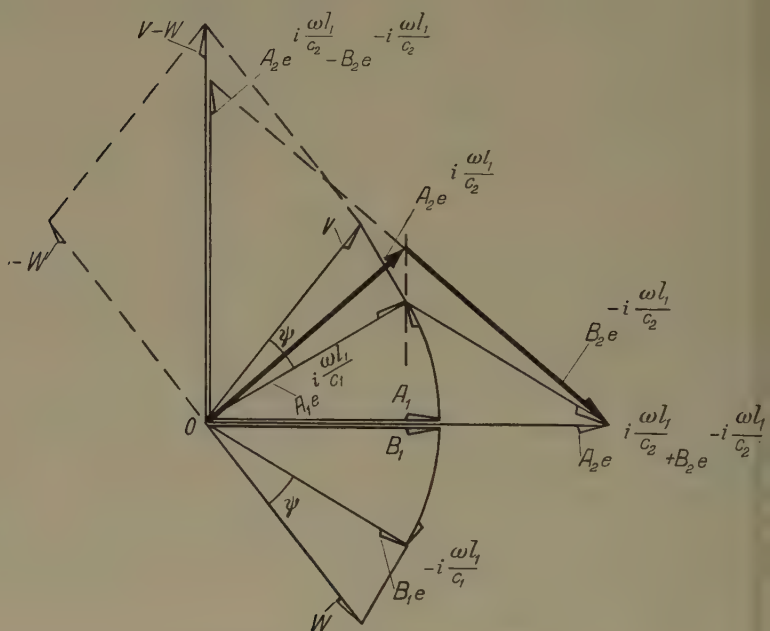
ist. Somit lassen sich $A_2 e^{i\omega l_1/c_2}$ und $B_2 e^{-i\omega l_1/c_2}$ aus den beiden zuletzt ge-

wonnenen Vektoren ermitteln (vgl. Figur 20). Sie sind in ihren skalaren Grössen immer gleich und liegen spiegelbildlich um die reelle Achse, mit ihren Pfeilspitzen in demselben Abstand von der imaginären Achse wie die Vektoren $A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ und $B_1 e^{-i\omega l_1/c_1}$.

Da die Vektoren A und B immer symmetrisch in bezug auf die reelle Achse auftreten, genügt es, nur einen von ihnen zu zeichnen, zum Beispiel den Vektor A . Somit kann die Darstellung vereinfacht werden. Man zeichnet in Figur 20 am Vektor $A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ das rechtwinklige Dreieck aOb und zieht die waagrechte Linie $\bar{b}\bar{c}$ und die lotrechte $\bar{c}\bar{e}$ durch den Punkt a .

Wird

$$\frac{de}{ce} = \frac{c_2 J_{p1}}{c_1 J_{p2}}$$



$$V = \left(i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) A_1 e^{i \frac{\omega l_1}{c_1}}$$

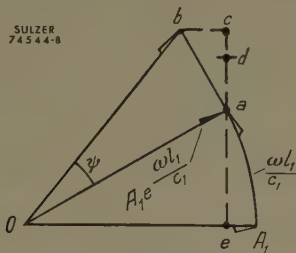
$$W = \left(-i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) B_1 e^{-i \frac{\omega l_1}{c_1}}$$

Figur 20

Konstruktion der Vektoren $A_2 e^{i\omega l_1/c_2}$ und $B_2 e^{-i\omega l_1/c_2}$ aus jenen A_1 und B_1 ($A_1 = B_1$).

gemacht, dann ist $O\vec{d} = A_2 e^{i\omega l_1/c_2}$. Aus diesem geht der Vektor $B_2 e^{-i\omega l_1/c_2}$ ohne weiteres hervor. Auf diese Weise geht man von einem Intervall zum nächsten über.

Es ist gewöhnlich $c_j = c_k$, da die Nockenwelle normalerweise aus einem einzigen Material gebaut wird. Ist ausserdem $J_{pj} = J_{pk}$, so fällt der Punkt d mit c

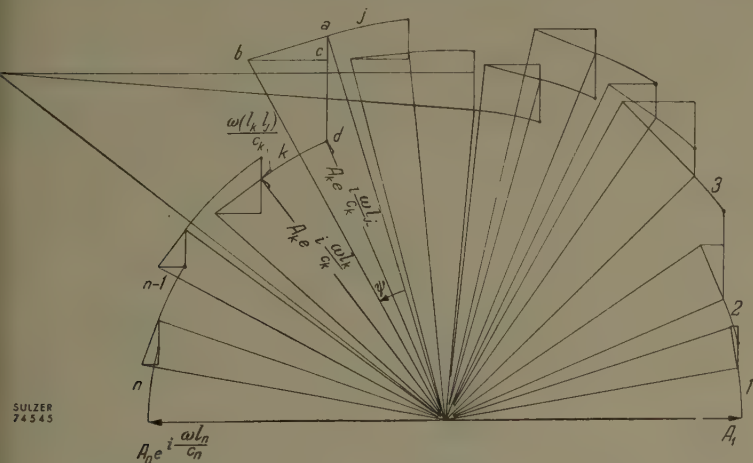


Figur 21

Der vereinfachte Vektorplan für den in Figur 20 dargestellten.

zusammen. Bei einem Übergang zweier Leitungsquerschnitte ohne dazwischenliegende Masse ist $\psi = 0$; dann schrumpft das Dreieck abc zum einzigen Punkt a zusammen. Der Punkt d wird einfach durch das Verhältnis $de/ae = c_2 J_{p1}/c_1 J_{p2}$ bestimmt.

Figur 22 zeigt den ganzen Vektorzug vom Intervall 1 bis n . Wenn ω richtig erraten ist, fällt der letzte Vektor $A_n e^{i\omega l_n/c_n}$ in die horizontale Lage. Ist dies nicht der Fall, so muss man es mit einem anderen ω versuchen. Mit etwas Übung kommt man auf diese Weise schnell zum Ziel.



Figur 22

Der ganze Vektorzug vom Intervall 1 bis n für das System der Figur 19.

9. Zusammenfassung

Die partielle Differentialgleichung für ein Torsionsschwingungssystem, unter Berücksichtigung sowohl der Masse wie auch der Dämpfung der elastischen Glieder, lässt sich streng lösen, wobei die Schwingungen als hin- und hergehende Wanderwellen behandelt werden. Die Schwingungen lassen sich wegen der Wirkung der Dämpfung nicht durch reine Kreisfunktionen ausdrücken.

Die erzwungenen Schwingungen mit Erregungen an mehr als einer Schwingmasse können nur durch das Charakteristikenverfahren gelöst werden. Ein Mehrmassensystem, wie eine Schiffsdieselanlage, lässt sich in zwei Teile zerlegen. In einem Teil sind erregende Kräfte vorhanden, im anderen nicht. Diese Trennung gestattet eine wesentliche Vereinfachung der ganzen Schwingungsberechnung.

Für Systeme ohne Dämpfung wird ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenz entwickelt, welches einfacher als die bisher bekannten rechnerischen Methoden ist.

Résumé

Un système mécanique composé de masses discrètes reliées entre elles par des arbres élastiques dont ni la masse ni l'amortissement ne sont négligeables, est susceptible de vibrations de torsion. Dans le cas le plus général, le problème se résout – d'après D'ALEMBERT – par deux ondes élastiques opposées dans leur sens de propagation. Du fait de la présence d'un amortissement dans les arbres élastiques, les vibrations ne se laissent plus exprimer par de simples fonctions goniométriques.

Les vibrations forcées entretenues en plusieurs endroits du système se résolvent par la méthode des caractéristiques. Tout système à masses multiples, tel que les installations motrices des bateaux, se laisse scinder en deux parties, l'une comprenant toutes les perturbations, l'autre n'en contenant aucune. Cette disjonction amène une simplification appréciable du calcul des vibrations.

Un procédé graphique de calcul de la fréquence propre a été établi pour tous systèmes à amortissement nul, mais où la masse des arbres élastiques n'est pas négligeable. Ce procédé est plus expéditif que toutes les méthodes analytiques connues.

(Eingegangen: 17. September 1953.)

On the Dynamics of Plastic Circular Plates¹⁾

By H. GEOFFREY HOPKINS and WILLIAM PRAGER, Providence, R.I., U.S.A.²⁾

1. Introduction

The general problem of plastic deformations in structures subjected to dynamic loading is very complex. So far only the simplest possible physical situations have been treated theoretically. These include the propagation of plane waves along a rod ([1] to [4])³⁾, the propagation of spherical waves in an infinite medium [5], and transverse impact on cables and membranes [6], [7], beams ([8] to [10]), and frames [11]. Since an exhaustive bibliography of this work is beyond the scope of this paper, only a few representative references are given.

The only theoretical work on transverse impact on plastic plates of which the authors are aware is that of BAKHSHIYAN [12] and KOCHETKOV [13]. These authors seem to be primarily interested in the piercing of armour plate by a projectile. They neglect all bending stresses in the plate, taking account only of the shearing stresses along the generators of coaxial cylinders around the path of the projectile which is supposed to be normal to the plate. In the present paper, the usual assumption of the theory of thin plates is adopted according to which the bending stresses and shearing stresses parallel to the surface of the plate far exceed the shearing stresses normal to the plate surface. Although the shear force resulting from the latter shearing stresses is taken into account in the equation of dynamic equilibrium, these shearing stresses are neglected in the yield condition.

In a previous paper [14], the authors discussed the load carrying capacities of thin circular plates made of a plastic-rigid material that obeys TRESCA's yield condition and the associated flow rule. Various conditions of rotationally symmetric loading and edge support were considered. In the present paper, the same type of analysis is applied to discuss the dynamic behavior of a simply supported circular plate subjected to a uniformly distributed load which is brought on suddenly and, after being kept constant during a certain interval of time, is removed suddenly.

¹⁾ The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, under Contract DA-19-020-ORD-798.

²⁾ Brown University.

³⁾ Numbers in square brackets refer to the Bibliography, page 330.

2. Equation of Dynamic Equilibrium. Yield Condition and Flow Rule

Let r , φ , z be cylindrical coordinates, the origin being at the center of the undeformed plate's middle surface, and the z -axis pointing vertically downwards. Furthermore, let R be the plate radius, w the deflection, M the bending moment caused by the radial stresses, and N the bending moment caused by the circumferential stresses¹). The variation of the rotationally symmetric states of stress and deflection will then be specified by giving w , M , and N as functions of the radial coordinate r and the time t .

The equation of dynamic equilibrium of the plate is readily obtained simply by including the inertia load in the equation of equilibrium given in the earlier paper [14]. If the mass per unit area of the middle surface is denoted by μ , the inertia load equals $-\mu w_{tt}$, and the equation of dynamic equilibrium takes the form (see equation (6) of [14]):

$$(r M)_t - N = r Q = - \int_0^r (\dot{p} - \mu w_{tt}) r dr, \quad (1)$$

where \dot{p} is the applied load intensity and Q the shear force transmitted across unit arc length of the cylinder of radius r .

Equation (1) is independent of the mechanical properties of the plate material. As in [14] these properties are specified by the yield condition and flow rule. The yield condition specifies those states of stress M , N under which plastic flow can occur. For each of these 'yield states of stress', the flow rule makes a statement regarding the rates of curvature

$$\kappa = -w_{rrt}, \quad \lambda = -\frac{1}{r} w_{rt} \quad (2)$$

that can occur under the considered yield state.

The following geometrical representation of yield condition and flow rule is convenient. Let the yield state M , N be represented by the point with the rectangular Cartesian coordinates M , N in 'stress space'. The locus of the points representing all possible yield states is called the 'yield locus'; it represents the yield condition. If κ , λ are rates of curvature that are possible under the yield state M , N , associate the 'flow vector' with the components κ , λ along the coordinate axes in stress space with the point M , N on the yield locus. The flow rule then establishes a geometrical relation between the points of the yield locus and the associated flow vectors.

The yield condition and flow rule used in this paper are obtained from TRESCA's yield condition and the associated flow rule. For details of the derivation the reader is referred to [14]; the results are as follows.

¹) Since subscripts will be used in the following to indicate differentiation, the notation M , N seems preferable to the usual notation M_r , M_φ . Similarly, κ , λ will be used instead of κ_r , κ_φ to denote the rates of curvature.

The yield locus is the hexagon $ABCDEF$ in Figure 1 where M_0 denotes the bending moment necessary to bend the plastic plate into a cylindrical surface. If the considered yield state is represented by a point P other than a vertex of the yield hexagon, the flow vector is normal to the side containing P and is directed towards the exterior of the hexagon. If the considered yield state is represented by a vertex Q of the yield hexagon, the flow vector may have the direction of the exterior normal to either of the two sides meeting at Q or to any direction between these two limiting directions.

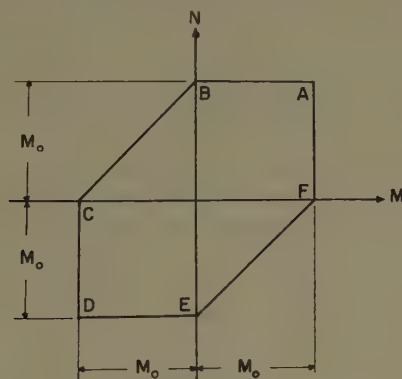


Figure 1
TRESCA yield hexagon.

It will appear later that only yield states represented by points on AB will occur in the problem discussed in this paper. Accordingly, only the following regimes need to be considered (Figure 1):

$$\text{Regime A: } M = N = M_0; \kappa \geq 0, \lambda \geq 0; \quad (3)$$

$$\text{Regime AB: } 0 < M < M_0, N = M_0; \kappa = 0, \lambda \geq 0; \quad (4)$$

$$\text{Regime B: } M = 0, N = M_0; 0 \geq \kappa \geq -\lambda. \quad (5)$$

There is also the possibility that part of the plate is not yielding at the considered instant. Since elastic deformations are neglected in the present analysis, such a part moves instantaneously as a rigid body, i.e. the rates of curvature κ and λ vanish. According to (2) this means that, at the considered instant, the rate of deflection w_i is independent of r .

3. Circles Separating Different Plastic Regimes. Hinge Circles

If the entire plate were at all times in the same regime, the determination of M , N , and w as functions of r and t would not constitute a difficult problem. For most problems, however, the plate is divided into a central circular region

together with a number of surrounding annular regions, each of these regions being in a different regime. Moreover, the number of regions and the position of their boundaries may vary with time. It therefore becomes necessary to establish relations between the mechanical quantities on the two sides of a circle separating two regimes.

Let \mathcal{C} be such a circle. Dynamic equilibrium requires that the radial bending moment M and the shear force Q are continuous across \mathcal{C} , but the circumferential bending moment N may be discontinuous. The cohesion of the plate material requires that the deflection w and the velocity w_t are continuous across \mathcal{C} , but the acceleration w_{tt} may be discontinuous as will be shown below. Moreover, the rates of curvature κ and λ may be discontinuous across \mathcal{C} . If λ , and hence w_{rt} , is discontinuous across \mathcal{C} , this circle is called a 'hinge circle'. In the present analysis hinge circles replace the yield hinges of the corresponding analysis of plastic beams and frames.

A hinge circle may be considered as the limiting case of a very narrow annulus across which w_{rt} varies rapidly although in a continuous manner. As the width of this annulus tends to zero, the ratio $\kappa:\lambda$ in the annulus becomes infinite. Consequently the regime at a hinge circle must be one of the following: A , C , D , F , CD , or FA . It follows that w_{rt} must be continuous except, at most, at circles where $|M| = M_0$.

The preceeding discussion shows that in principle a hinge circle need not be a regime boundary and conversely a regime boundary need not be a hinge circle. However, for the example that is to be discussed in the following, it turns out that except at the plate edge all regime boundaries are in fact hinge circles and vice versa. On account of this we shall not trouble to distinguish between regime boundaries and hinge circles in the following.

In general the radius ϱ of a hinge circle \mathcal{C} varies with time; the hinge circle is called 'stationary' whenever $\varrho_t = 0$. To discuss possible discontinuities of the derivatives of w across a hinge circle \mathcal{C} , represent the variation of ϱ by the curve I' with the equation $r = \varrho(t)$ with respect to rectangular Cartesian coordinates r, t . Since the deflection w must be continuous across I' , the derivative of w along I' is also continuous. Thus,

$$[w_t] + \varrho_t[w_r] = 0, \quad (6)$$

where the brackets indicate the discontinuities of the enclosed quantities across the curve I' . Now w_t is continuous across I' ; equation (6) therefore shows that the slope w_r can be discontinuous only across a stationary hinge circle. If the hinge circle \mathcal{C} is not stationary, w_r must be continuous across I' ; hence

$$[w_{rt}] + \varrho_t[w_{rr}] = 0, \quad (7)$$

where by hypothesis $\varrho_t \neq 0$.

Let us now return to the general case of a stationary or nonstationary hinge circle. From the continuity of the velocity w_t across I' it follows that

$$[w_{tt}] + \varrho_t[w_{rt}] = 0. \quad (8)$$

Thus, the acceleration w_{tt} must be continuous across a stationary hinge circle but discontinuous across a nonstationary hinge circle because λ , and hence w_{rt} , is by definition discontinuous across such a circle.

Dynamic equilibrium requires M to be continuous across I' ; thus

$$[M_t] + \varrho_t[M_r] = 0. \quad (9)$$

In deriving equations (6) to (9), we have tacitly assumed that \mathcal{C} is the only hinge circle that occurs in the considered portion of the plate. If we had to deal with two hinge circles \mathcal{C} and \mathcal{C}' , one moving faster than the other and eventually catching up with it, we should have to give special consideration to the conditions at the point of intersection of the curves I' and I'' that represent the motions of the two hinge circles.

4. The Mathematical Problem

We are now in a position to formulate the mathematical problem of the motion of a circular plate under uniformly distributed, time-dependent loading $p = p(t)$. It is assumed that the plate is initially flat [$w(r, 0) = 0$] and at rest [$w_t(r, 0) = 0$], and the origin of time is so chosen that the plate begins to yield at $t = 0$. The deflection $w(r, t)$ and the bending moments $M(r, t)$ and $N(r, t)$ are then to be determined in such a manner that certain conditions are fulfilled throughout $0 \leq r \leq R$ for all $t \geq 0$. In enumerating these conditions, we shall first assume that $p(t)$ is continuous. We then have the following conditions.

- (i) w and w_t are continuous in r and t ; the derivatives w_r , w_{rr} , w_{rt} , w_{tt} are piecewise continuous in r and continuous in t , r -discontinuities occurring only at hinge circles. Across a stationary hinge circle w_r and hence w_{rr} and w_{rt} may be discontinuous, but w_{tt} must be continuous. Across a nonstationary hinge circle w_r must be continuous, but w_{rr} , w_{rt} , and w_{tt} may have discontinuities satisfying the equations (7) and (8).
- (ii) M is continuous in r and t ; the derivatives M_r and M_t are piecewise continuous in r and t , r -discontinuities occurring only at hinge circles. These discontinuities must satisfy equation (9). N is piecewise continuous in r and continuous in t .
- (iii) w , M , and N satisfy the equation of dynamic equilibrium, equation (1). At the center of the plate $M = N = M_0$ unless a neighborhood of the center moves as a rigid body with $w_{rt} = 0$ identically in r .

- (iv) The point M, N lies inside or on the yield hexagon of Figure 1. In the first case $w_{,t} = 0$ throughout the region in which the state of stress is represented by interior points of the yield hexagon. In the second case, the rates of curvature and the bending moments must satisfy the flow rule [equations (3) to (5)].
- (v) At the simply supported edge, $M(R, t) = 0$, $w(R, t) = 0$ for all $t \geq 0$.
- (vi) Initially, $w(r, 0) = 0$, $w_{,t}(r, 0) = 0$ for $0 \leq r \leq R$.

When $p(t)$ is allowed to have discontinuities, all quantities considered above, except w and $w_{,t}$, must be allowed to have corresponding discontinuities in t .

5. Simply Supported Plate under Uniformly Distributed, Rectangular Load Pulse

Consider a simply supported plate under the action of a uniformly distributed load that is brought on suddenly at $t = 0$, maintained at the constant intensity p during $0 < t < \tau$, and suddenly removed at $t = \tau$. It follows from the limit analysis presented in the earlier paper [14], that dynamic plastic action will occur only if

$$p > p_0 = \frac{6 M_0}{R^2}; \quad (10)$$

for $p = p_0$ the plate yields indefinitely slowly and inertia forces do not arise. When (10) is satisfied, the dynamic behavior of the plate is found to have different character according as the load is 'medium' ($p_0 < p < 2p_0$) or 'high' ($p > 2p_0$).

a) Medium load ($p_0 < p < 2p_0$)

Two phases must be distinguished in which the motion of the plate is governed by different equations.

Phase I ($0 < t < \tau$). In the indefinitely slow yielding under the load p_0 the originally plane middle surface of the plate is transformed into a cone (see [14]). Guided by this fact consider the motion described by

$$w(r, t) = W(t) \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (11)$$

where $W(t)$ is a function of t as yet undetermined. This motion satisfies the boundary condition $w(R, t) = 0$ [see (v) above], and the initial conditions (vi) will be satisfied if

$$W(0) = W_{,t}(0) = 0. \quad (12)$$

According to (2) the rates of curvature associated with (11) are

$$\kappa = 0, \quad \lambda = \frac{W_{,t}}{R}. \quad (13)$$

When $W_t > 0$ the flow rules (3) to (5) therefore require that

$$0 \leq M \leq M_0, \quad N = M_0. \quad (14)$$

With this value of N and the condition that $M = M_0$ for $r = 0$, the equation of dynamic equilibrium (1) furnishes

$$M = M_0 - \frac{1}{6} \rho r^2 + \frac{\mu}{12} W_{tt} r^2 \left(2 - \frac{r}{R}\right). \quad (15)$$

At the simply supported edge $M(R, t) = 0$ [see (v)]. This condition and the initial conditions (12) will be fulfilled if

$$W(t) = \frac{\dot{p} - \dot{p}_0}{\mu} t^2. \quad (16)$$

Note that this gives $W_t > 0$ as was assumed above. Substitution of (16) into (15) yields

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{\dot{p} r^2}{\dot{p}_0 R^2} + \left(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0} - 1\right) \frac{r^2}{R^2} \left(2 - \frac{r}{R}\right). \quad (17)$$

As r varies from 0 to R , the bending moment (17) is found to decrease monotonically from M_0 to 0 if $\dot{p}_0 < \dot{p} < 2\dot{p}_0$. The first relation (14) is therefore satisfied, and w as given by (11) and (16), $N = M_0$, and M as given by (17) constitute a solution of the problem for $0 < t < \tau$ and $\dot{p}_0 < \dot{p} < 2\dot{p}_0$.

Phase II ($\tau < t < T$). At $t = \tau$ the load \dot{p} is suddenly removed, but the plate will not cease moving until the kinetic energy acquired under the action of \dot{p} has been dissipated in plastic work. The instant at which the plate comes to rest will be denoted as $t = T$. During this second phase of the motion, $\dot{p} = 0$.

It so happens that all conditions of the problem can be satisfied by assuming w to have the form (11) and M to have the form (15) with $\dot{p} = 0$. The function $W(t)$ for the second phase is determined from the conditions that w and w_t are continuous at $t = \tau$ and that $M(R, t) = 0$ for $\tau < t < T$. Thus

$$W(t) = \frac{\dot{p}}{\mu} \tau (2t - \tau) - \frac{\dot{p}_0}{\mu} t^2, \quad (18)$$

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \left(2 - \frac{r}{R}\right). \quad (19)$$

The expression (19) satisfies the first relation (14) for $0 \leq r \leq R$, and equation (18) shows that $W_t > 0$ only when

$$t < T = \frac{\dot{p} \tau}{\dot{p}_0}. \quad (20)$$

At the instant $t = T$ the entire plate comes to rest. The final permanent deflection of the plate is found by replacing t in (18) by T as given in (20) and

substituting the result into (11). Thus

$$w(r, T) = \frac{p(p - p_0)}{\mu \dot{p}_0} \tau^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (21)$$

In particular the central permanent deflection is given by

$$w(0, T) = \frac{I I^*}{\mu \dot{p}_0}, \quad (22)$$

where $I = p \tau$ is the total pressure impulse acting on the plate, and $I^* = (p - p_0) \tau$ may be called the 'excess pressure impulse', the term 'excess pressure' referring to the excess of the pressure p over the minimum pressure p_0 required to produce plastic deformation.

b) High load ($p > 2 p_0$)

Equation (17) yields

$$M_r(0, t) = 0, \quad M_{rr}(0, t) = 2 \frac{M_0}{R^2} \left(\frac{p}{\dot{p}_0} - 2 \right). \quad (23)$$

These relations show that the value $M(0, t) = M_0$ is a maximum only if $p < 2 p_0$, but becomes a minimum when $p > 2 p_0$. In the latter case, the bending moment M would assume values in excess of M_0 in the neighborhood of $r = 0$. Since this would violate the yield condition, the expression (17) no longer represents a solution when $p > 2 p_0$. Since M has the tendency of increasing beyond M_0 near the center of the plate, but is prevented from doing this by the yield condition, we must expect that $M = M_0$ over a central circular region $0 \leq r < \varrho_0$ when $p > p_0$. Thus the regime *A* applies for the part $0 \leq r < \varrho_0$, and the regime *AB* for the rest of the plate. Since $M = N = M_0$ for the regime *A*, the equation of dynamic equilibrium (1) shows that

$$w_{tt} = \frac{p}{\mu}, \quad 0 \leq r < \varrho_0. \quad (24)$$

All points of this central region thus move with an acceleration which is independent of r and t .

In the present case the motion of the plate consists of three phases.

Phase I ($0 < t < \tau$). The preceding discussion suggests that in this phase the deflection is of the form

$$w(r, t) = \begin{cases} W(t), & 0 \leq r \leq \varrho_0, \\ W(t) \frac{R - r}{R - \varrho_0}, & \varrho_0 \leq r \leq R, \end{cases} \quad (25)$$

where ϱ_0 is independent of t but depends on p in a manner that has yet to be determined. The deflection (25) satisfies the boundary condition $w(R, t) = 0$ and also the initial conditions $w(r, 0) = w_t(r, 0) = 0$ provided that $W(t)$ is chosen so as to satisfy (12).

The rates of curvature associated with (25) are

$$\left. \begin{aligned} \kappa = \lambda = 0, \quad 0 \leq r < \varrho_0, \\ \kappa = 0, \quad \lambda = \frac{W_t(t)}{(R - \varrho_0)r}, \quad \varrho_0 < r \leq R. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Thus λ is discontinuous at $r = \varrho_0$, and the circle $r = \varrho_0$ is a stationary hinge circle. Equations (26) are compatible with the assumption that the regime A applies inside, and the regime AB outside, this circle, except for the boundary circle $r = R$ which is in the regime B because $M(R, t) = 0$. We therefore have

$$\left. \begin{aligned} M = N = M_0, \quad 0 \leq r < \varrho_0, \quad 0 < M < M_0, \\ N = M_0, \quad \varrho_0 < r < R, \quad M = 0, \quad N = M_0, \quad r = R. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

From (24), the first equation (25), and the initial conditions (12), it follows that

$$W(t) = \frac{p t^2}{2\mu}. \quad (28)$$

The bending moment M must be continuous across the hinge circle $r = \varrho_0$. Thus $M(\varrho_0, t) = M_0$; moreover, $M(R, t) = 0$. With these boundary conditions and with $w(r, t)$ as specified by (28) and the second equation (25), the equation of dynamic equilibrium (1) applied to $\varrho_0 \leq r \leq R$ yields

$$\frac{p}{2p_0} = \frac{R^3}{(R - \varrho_0)^2 (R + \varrho_0)} \quad (29)$$

and

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{R(r - \varrho_0)^3 (r + \varrho_0)}{r(R - \varrho_0)^3 (R + \varrho_0)}, \quad \varrho_0 \leq r \leq R. \quad (30)$$

According to (30), M decreases monotonically from M_0 to 0 as r increases from ϱ_0 to R . The continued inequality for M in (27) is therefore fulfilled.

Equation (29) determines ϱ_0/R as a function of $p/(2p_0)$. The value of ϱ_0/R corresponding to a given value of $p/(2p_0)$ can be read off Figure 2. As p increases indefinitely, ϱ_0 is seen to tend towards R .

Phase II ($\tau < t < T_1$). During this phase the radius $\varrho = \varrho(t)$ of the hinge circle is found to decrease from $\varrho(\tau) = \varrho_0$ to $\varrho(T_1) = 0$. Indeed if we assume that the regime A continues to apply near the center of the plate the reasoning which led to equation (28) shows that the diminishing central portion of the plate must preserve whatever velocity it had at $t = \tau$. If the radius of the hinge circle remained constant under these circumstances, the kinetic energy of the

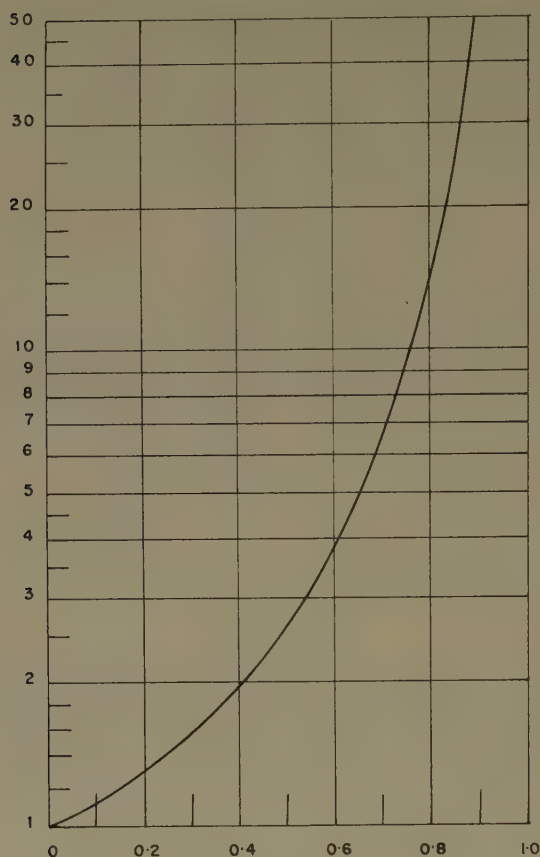


Figure 2

Variation of $p/(2 p_0)$ or T_1/t (ordinate) with q_0/R or $q(t)/R$ (abscissa), respectively.

plate would remain constant in contradiction of the fact that energy is dissipated in plastic deformation. In view of (28), these remarks suggest that the velocity during the second phase is of the form

$$w_t(r, t) = \begin{cases} \frac{p \tau}{\mu}, & 0 \leq r \leq q(t), \\ \frac{p \tau}{\mu} \cdot \frac{R - r}{R - q(t)}, & q(t) \leq r \leq R, \end{cases} \quad (31)$$

where $q(t)$ remains to be determined. The reasoning which led to the equations

(29) and (30) now yields the following relations:

$$\varrho_t (R^2 + 2 R \varrho - 3 \varrho^2) = \frac{-2 \dot{p}_0 R^3}{\dot{p} \tau}, \quad (32)$$

and

$$\frac{M}{M_0} = 1 + \frac{R (r - \varrho)^2 [r^2 - 2 (R - \varrho) r - \varrho (4 R - 3 \varrho)]}{r (R - \varrho)^3 (R + 3 \varrho)}, \quad \varrho(t) \leq r \leq R. \quad (33)$$

Equation (32) must be integrated under the initial condition that $\varrho(\tau) = \varrho_0$. With the use of (29), we thus obtain the following cubic equation for $\varrho = \varrho(t)$:

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^3 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 - \frac{\varrho}{R} = \frac{2 \dot{p}_0 t}{\dot{p} \tau} - 1. \quad (34)$$

Since $\varrho(T_1) = 0$, by the definition of T_1 , equation (34) yields

$$T_1 = \frac{\dot{p} \tau}{2 \dot{p}_0}, \quad (35)$$

and the right-hand side of (34) can be written as $(t/T_1) - 1$. It is then seen that equation (34) establishes exactly the same relation between T_1/t and ϱ/R as does equation (29) between $\dot{p}/(2 \dot{p}_0)$ and ϱ_0/R . Thus a simple relabeling of the coordinate axes in Figure 2 will enable us to find, from this figure, the value of ϱ/R that corresponds to a given value of T_1/t .

For a fixed value of t , and hence of ϱ , the bending moment (33) decreases monotonically from $M(\varrho, t) = M_0$ to $M(R, t) = 0$. The continued inequality for M in (27) is therefore satisfied.

Finally the deflection $w(r, t)$ remains to be determined. We shall here be concerned only with the deflection $w(r, T_1)$ at the end of the second phase, and we shall determine this by making use of the jump condition (7).

Equations (25) and (28) show that, at the end of the first phase, the middle surface of the plate has the shape of a truncated cone, the deflection of the points inside the hinge circle $r = \varrho_0$ being $\dot{p} \tau^2/(2 \mu)$. At the end of the first phase, a discontinuity in slope has therefore developed at $r = \varrho_0$:

$$w_r(\varrho_0 + 0, \tau) - w_r(\varrho_0 - 0, \tau) = -\frac{\dot{p} \tau^2}{2 \mu (R - \varrho_0)}. \quad (36)$$

During the second phase the hinge circle is contracting. Since the velocity w_t must be continuous across this nonstationary hinge circle, equation (6) shows that new discontinuities in slope cannot develop during the second phase. According to the first equation (31), the contracting hinge circle moves into a region in which $w_{rr} = 0$. Consider a fixed circle \mathcal{C} of the radius r . As the contracting hinge circle \mathcal{H} moves across \mathcal{C} , it produces there a curvature w_{rr} of the plate meridian which can be found from equations (7) and (31). Indeed,

according to (31), we have at \mathcal{H}

$$[w_{rt}] = -\frac{p\tau}{\mu(R-\varrho)}, \quad (37)$$

and hence, by (7) and (32),

$$[w_{rr}] = -\frac{p\tau^2}{2\mu} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{R+3\varrho}{R^3}. \quad (38)$$

Since \mathcal{H} moves into a region in which the plate has performed a vertical translation only, w_{rr} vanishes inside \mathcal{H} . The jump (38) thus equals the value of w_{rr} just outside \mathcal{H} . The second equation (31) shows that $w_{rrt} = 0$ outside \mathcal{H} , so that no further change in the curvature w_{rr} occurs at \mathcal{C} once \mathcal{H} has moved across \mathcal{C} . Thus,

$$w_{rr}(r, t) = -\frac{p\tau^2}{2\mu} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{R+3r}{R^3}, \quad \varrho(t) < r < \varrho_0. \quad (39)$$

At the end of the second phase, equation (39) applies right up to the center of the plate. Since

$$w_r(0, T_1) = 0, \quad w(0, T_1) = \frac{p\tau^2}{2\mu} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right), \quad (40)$$

by (28) and the first equation (31), integration of (39) with the initial conditions (40) yields

$$w(r, T_1) = \frac{p\tau^2}{2\mu} \left[\frac{p}{2p_0} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{r^3}{R^3} \right) - 1 \right], \quad 0 \leq r \leq \varrho_0. \quad (41)$$

Outside the circle of radius r_0 , the middle surface of the plate assumes the shape of a right circular cone. This is determined by the deflection $w(\varrho_0, T_1)$ found from (41) and the condition that $w(R, T_1) = 0$. We leave it to the reader to check that the discontinuity in the slope w_r of the middle surface at $r = \varrho_0$ when $t = T_1$ has the value (36).

Phase III ($T_1 < t < T_2$). At the end of the second phase the entire plate except the center and the edge is in the regime *AB*. The subsequent motion of the plate is therefore described by equation (11) in which $W(t)$ must be suitably determined. The analysis of this third phase of the motion proceeds along similar lines as the analysis of the second phase in the case of medium load. We leave it to the reader to work out the details and state only the following facts.

The plate comes to rest at the time

$$T_2 = 2T_1. \quad (42)$$

The deflection at this instant inside the circle of radius ϱ_0 is given by

$$w(r, T_2) = \frac{p \tau^2}{2 \mu} \left[\frac{p}{2 p_0} \left(3 - \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} - \frac{r^3}{R^3} \right) - 1 \right], \quad 0 \leq r \leq \varrho_0, \quad (43)$$

and outside this circle is linear in r ($\varrho_0 \leq r \leq R$), vanishing of course at the plate edge. In particular it follows that the final central deflection is

$$w(0, T_2) = \frac{I^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{p_0}{p} \right)}{2 \mu p_0}, \quad (44)$$

where $I = p \tau$ is the total impulse acting on the plate.

It should be noted that the meridian of the permanently deformed plate is curved for $0 < r < \varrho_0$ and straight for $\varrho_0 < r \leq R$ with nonvanishing slope at $r = 0$ and a discontinuity of slope at $r = \varrho_0$.

In Figure 3, the variation of $w(r, T_2)/w(0, T_2)$ with r/R is shown for some representative values of $p/(2 p_0)$; as $p/(2 p_0)$ increases the central curved part of the permanently deformed plate is seen to increase in size.

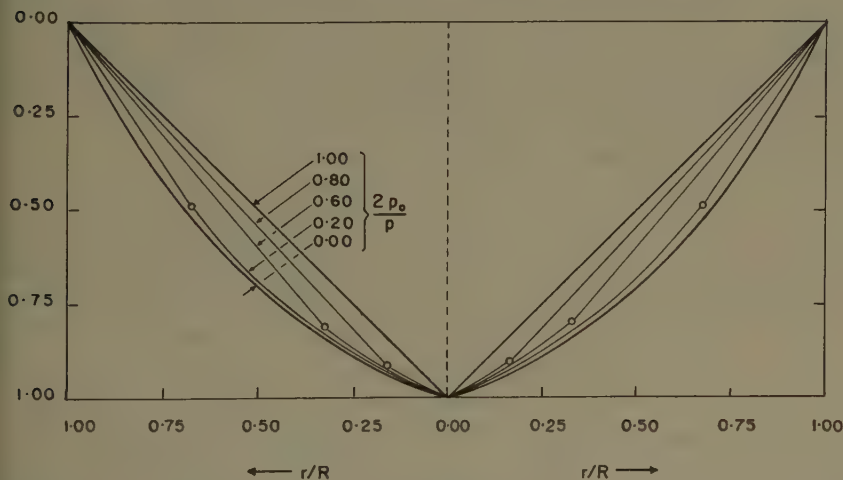


Figure 3

Variation of final deflection across plate, expressed in terms of central deflection, with pressure intensity. (The circles indicate the positions of the hinge circles in phase I.)

Abstract

The paper is concerned with the dynamics of a thin circular plate made of a plastic-rigid material that obeys the yield condition of TRESCA and the associated flow rule. The basic equations are established in the case of rotational symmetry, and their complete solution is given for a simply supported plate subjected to a uniformly distributed load which is brought on suddenly and, after a certain time interval, removed suddenly.

BIBLIOGRAPHY

- [1] L. H. DONNELL, Trans. Amer. Soc. mech. Eng. 50, 153 (1930).
- [2] G. I. TAYLOR, British Official Report, R. C. 70 (1940).
- [3] TH. VON KÁRMÁN and P. E. DUWEZ, J. appl. Phys. 21, 987 (1950).
- [4] H. A. RAKHMATOLIN, Prikl. Mat. Mekh. 10, 333 (1946).
- [5] F. A. BAKHSHIYAN, Prikl. Mat. Mekh. 12, 281 (1948).
- [6] D. M. GRIGORYAN, Prikl. Mat. Mekh. 13, 277 (1949).
- [7] J. W. CRAGGS, Proc. Roy. Soc. Edinburgh [A] 63, 359 (1952).
- [8] P. E. DUWEZ, D. S. CLARK, H. F. BOHNENBLUST, J. appl. Mech. 17, 27 (1950).
- [9] M. F. CONROY, J. appl. Mech. 19, 465 (1952).
- [10] E. H. LEE and P. S. SYMONDS, J. appl. Mech. 19, 308 (1952).
- [11] S. L. PAN, L. E. GOODMAN, and N. M. NEWMARK, ONR Technical Report N6ori-77, Task Order VI, Project NR-035-183 (1951).
- [12] F. A. BAKHSHIYAN, Prikl. Mat. Mekh. 12, 47 (1948).
- [13] A. M. KOCHETKOV, Prikl. Mat. Mekh. 14, 203 (1950).
- [14] H. G. HOPKINS and W. PRAGER, J. Mech. Phys. Solids 2, 1 (1953).

Résumé

Cet article étudie la dynamique d'une plaque circulaire infiniment mince fabriquée avec un matériau plastique qui obéit à la condition de plasticité de TRESCA et à la loi d'écoulement associée. Les équations fondamentales sont établies dans le cas où existe une symétrie de révolution. Leur solution complète est donnée pour une plaque reposant sur des appuis simples, soumise à une charge uniformément répartie qui est appliquée rapidement et demeure constante pendant un certain temps, après lequel elle est rapidement retirée.

(Received: October 2, 1953.)

Stress Distributions in Semi-Infinite Solids of Revolution

By ANTONY J. A. MORGAN¹⁾, Pasadena, California

Introduction

All of the problems presented in this paper are solved by reducing the governing partial differential equations to ordinary differential equations for which closed solutions are found. This reduction is accomplished by the application of a recently developed theory [1]²⁾ for obtaining *similarity solutions*³⁾ of systems of partial differential equations. The term *invariant solutions* is suggested in place of *similarity solutions* because this terminology reveals their underlying mathematical nature [1], [2], [3].

The solution to the problem of obtaining the stress distribution in a solid bounded by two concentric cones with a common apex, under external loadings

¹⁾ Aercon, Inc.

²⁾ Numbers in brackets refer to the References, page 340.

³⁾ This terminology is used in aerodynamics (laminar boundary layer, conical flow, etc.).

which vary as an arbitrary real number power of the distance from the apex, has not been previously reported in the literature. Solutions of this problem are presented in this paper.

If $\alpha > \beta$ are the semi-vertex angles of the two bounding cones, three cases are distinguished:

- (i) $\alpha > \pi/2 > \beta$: this can be considered as a circular plate of infinite radius;
- (ii) $\pi/2 > \alpha > \beta$: corresponds to a semi-infinite conical shell, and
- (iii) $\pi/2 > \alpha > 0$, one bounding cone: is equivalent to a semi-infinite solid cone.

In all of these cases the thickness increases linearly from the apex. These distinctions, (i), (ii), and (iii) (Figures 1, 2, 3), are of importance since they dictate different choices for the form of the stress-function solution.

Nomenclature

The following notation is used in the paper:

a	numerical parameter in a group of transformations;
C_1, \dots, C_4	constants of integration;
D	differential operator $= d/d\eta$ if η is the independent variable;
d	greatest value of r or z , at which one of the proportional limits of the material is attained;
e	least value of r or z , at which one of the proportional limits of the material is attained;
$F(\xi)$	dependent variable of equation (15), defined by equation (12);
$F(\rho, \sigma; \tau; z)$	hypergeometric function of real argument z ;
$G(\eta)$	new dependent variable for equation (15), defined by equation (22);
k	$\tan \alpha$;
k'	$\tan \beta$;
m, n, p	numerical constants associated with the group in which a is the parameter;
P	normal loading (force/unit area) on upper face of semi-inf. nite solid of revolution;
$P_\mu(\xi)$	Legendre function of the first kind of order μ and argument ξ ;
q	a real number exponent denoting the type of variation of the external normal and tangential loads;
$Q_\mu(\xi)$	Legendre function of the second kind of order μ and argument ξ ;
T	tangential (shear) loading (force/unit area) on upper surface of semi-infinite solid of revolution;
$v(\xi)$	new dependent variable for equation (15), defined by equation (I. 2);
r, θ, z	cylindrical coordinates;
α	angle of upper surface of semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes (Figures 1, 2, 3);

β	angle of lower surface of semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes respectively (Figures 1, 2);
γ	$q + 3$;
Γ	the gamma function;
ξ	$\xi (1 + \xi^2)^{-1/2}$, for circular plates; $(1 + \eta^2)^{-1/2}$, for conical shells and solid cones;
η	$(r/z) =$ similarity variable used in semi-infinite solid of revolution (conical shell) problem;
μ	$q + 1$;
ν	POISSON'S constant;
ξ	$(z/r) =$ second similarity variable used in semi-infinite solid of revolution (circular plate) problem;
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$	stresses, cylindrical coordinates (axial symmetry);
$\Phi(r, z)$	stress function in cylindrical coordinates (axial symmetry);
ω	angle of ray within semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes (Figures 1, 2, 3).

Primed quantities denote external loadings on lower surface of semi-infinite solid of revolution.

Dashes denote differentiation with respect to independent variable indicated by the context.

Circular Plates of Infinite Radius and Linearly Varying Thickness

This corresponds to case (i) (Introduction), an axially symmetric problem, where the external loadings are as shown in Figure 1.

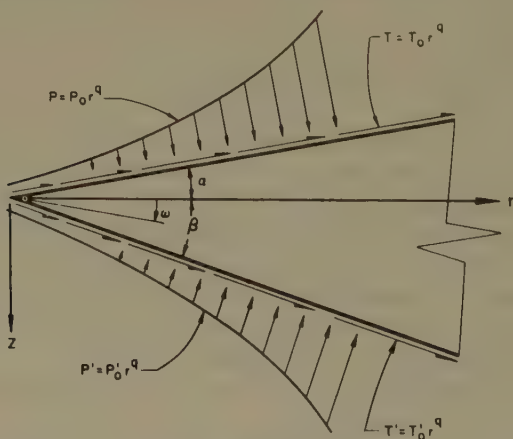


Figure 1

The Circular Plate of Infinite Radius and Linearly Varying Thickness.

The stress distribution within the plate is determined by a solution of the partial differential equation [4], [5]

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0, \tag{1}$$

where Φ is the stress function in cylindrical coordinates and the stresses are given by:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \tag{3}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \tag{4}$$

and

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \tag{5}$$

The desired solution of equation (1) must satisfy the boundary conditions:

$$P - T k = -\sigma_z - \tau_{rz} k, \tag{6}$$

$$P k + T = -\sigma_r k - \tau_{rz}, \tag{7}$$

at the upper face ($\omega = -\alpha$), and

$$P' - T' k' = -\sigma_z + \tau_{rz} k', \tag{8}$$

$$P' k' + T' = -\sigma_r k' + \tau_{rz}, \tag{9}$$

at the lower face ($\omega = \beta$) of the plate. Note that the angle ω is measured with respect to the r -axis.

The form of the solution is deduced as follows: Equation (1) is unchanged (constant conformally invariant) under the transformations¹⁾

$$\bar{r} = a^m r, \quad \bar{z} = a^n z, \quad \bar{\Phi} = a^p \Phi, \tag{10}$$

where $a (\neq 0)$ is a numerical parameter and m, n, p are real constants, if $(n/m) = 1$ and (p/m) is arbitrary. Two absolute invariants of the transformations (10) are

$$\frac{z}{r^{n/m}} \quad \text{and} \quad \frac{\Phi}{r^{p/m}}. \tag{11}$$

Hence, the substitution of

$$\Phi = r^{p/m} F(\xi), \quad \xi = \frac{z}{r} \tag{12}$$

¹⁾ Mathematically, this is a continuous one-parameter group of transformations. See [1], [2], and [3] for terminology used in group theory.

into equation (1) will, by a known theorem [1], reduce it to an ordinary differential equation with $F(\xi)$ and ξ as dependent and independent variables respectively.

Equation (12) gives the desired form of the solution, if the external loadings are of the form:

$$P = P_0 r^q, \quad T = T_0 r^q, \quad P' = P'_0 r^q, \quad T' = T'_0 r^q, \quad (13)$$

when

$$\frac{p}{m} = q + 3. \quad (14)$$

This is seen on substituting equations (10) in equations (2) to (5) and then substituting the results, together with equations (13), in equations (6) to (9).

The substitution of equations (12) into equation (1) gives the ordinary differential equation

$$\left. \begin{aligned} &(\xi^2 + 1)^2 F^{IV}(\xi) - 2(2q + 1)\xi(\xi^2 + 1)F'''(\xi) \\ &+ [2(q + 1)^2(3\xi^2 + 1) - \xi^2]F''(\xi) - [2(q + 1)(q + 2) - 1](2q + 3)\xi F'(\xi) \\ &+ (q + 1)^2(q + 3)^2 F(\xi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

whose general solution (Appendix I) is:

$$F(\xi) = (1 - \xi^2)^{-(\gamma/2)} [C_1 P_\mu(\zeta) + C_2 Q_\mu(\zeta) + C_3 P_\gamma(\zeta) + C_4 Q_\gamma(\zeta)], \quad (16)$$

where

$$\zeta = \xi(1 + \xi^2)^{-(1/2)} \quad (0 \leq |\zeta| < 1),$$

$$\mu = q + 1,$$

$$\gamma = q + 3,$$

$P_\mu(\zeta)$ = Legendre Function of the first kind of order μ with argument ζ , and

$Q_\mu(\zeta)$ = Legendre Function of the second kind of order μ with argument ζ .

By direct calculation, on substituting equations (12) and (14) into equations (2) to (5), the stresses, in terms of q , ξ , and $F(\xi)$, are given by the following expressions:

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \sigma_r &= (q + 2)[\nu(q + 2) - (q + 1)]F'(\xi) \\ &+ [2(q + 1) - \nu(2q + 3)]\xi F''(\xi) + [\nu(1 + \xi^2) - \xi^2]F'''(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \sigma_\theta &= (q + 2)[\nu(q + 2) - 1]F'(\xi) - \nu(2q + 3)\xi F''(\xi) \\ &+ [(2 - \nu)(1 + \xi^2) - 1]F'''(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \sigma_z = & (2 - \nu) (q + 2)^2 F'(\xi) - (2 - \nu) (2q + 3) \xi F''(\xi) \\ & + [(2 - \nu) (1 + \xi^2) - 1] F'''(\xi); \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

and

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \tau_{rz} = & (1 - \nu) (q + 1) (q + 3)^2 F(\xi) - (1 - \nu) (3q^2 + 11q + 9) \xi F'(\xi) \\ & + [(1 - \nu) (3q + 4) \xi^2 - \nu (q + 1)] F''(\xi) \\ & + [1 - (1 - \nu) (\xi^2 + 1)] \xi F'''(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Equations (13) and (17) to (20) can be used to express the boundary conditions (6) to (9) in terms of $P_0, T_0, P'_0, T'_0, k, k', F(\xi)$ and the derivatives of $F(\xi)$. The stress distribution within the circular plate (Figure 1), under external loadings given by equation (13), is then completely determined by the solution (16) of equation (15).

Several cases must be considered:

Case A, $q > 0$. Here the stresses, equations (17) to (20), become infinite as $r \rightarrow \infty$ for any fixed ξ within the body. The proportional limits of the material (in shear or tension) are then attained at some values of $r > 0$. Let $r = e$ be the least such r . The problem will retain physical significance if the plate is cut crosswise at some $r < e$ and the stresses given by equations (17) to (20) are applied at the cut as external forces.

Case B, $q < 0$. The stresses are infinite at the origin ($r = 0$). Let $r = d$ be the greatest value of r at which one of the proportional limits of the material is attained. Physical significance is retained on cutting a hole, of radius $> d$, in the center of the plate and applying an appropriate system of stresses [given by equations (17) to (20)] at the cut as external forces.

The case $q = 0$ (uniform loading) does not yield infinite stresses at any point in the plate. The restrictions outlined under *cases A* and *B* will also apply in all subsequent considerations.

Semi-Infinite Conical Shells of Linearly Varying Thickness

This corresponds to case (ii) (Introduction). The situation is illustrated by Figure 2. The solution (16) could also be used for this case if the external loadings were expressed as a power of r . For ease of application it is convenient to seek a solution which allows the external loadings to be written as proportional to a power of z and the cone vertex angles to be measured with respect to the z -axis. This is possible since equations (12) and (14) indicate that the stress function $\Phi(r, z)$ may be written as:

$$\Phi = z^\nu \eta^\nu F\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad \eta = \frac{1}{\xi} = \frac{r}{z}, \quad (21)$$

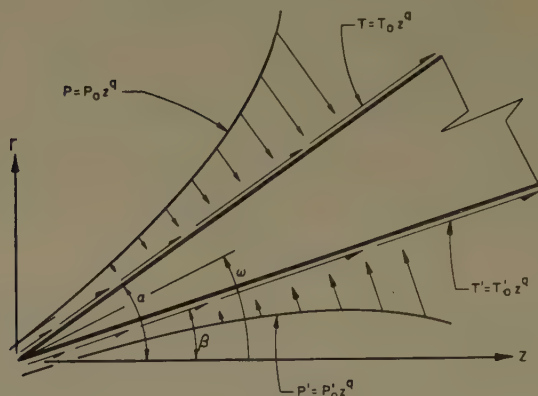


Figure 2

The Semi-Infinite Conical Shell of Linearly Varying Thickness.

where $F(\xi)$ is the solution (16) and γ is any real number. Thus the required solution is

$$G(\eta) = \eta^\gamma F\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad (22)$$

where $\gamma = q + 3$. Hence, by equation (16),

$$G(\eta) = \zeta^{-\gamma} [C_1 P_\mu(\zeta) + C_2 Q_\mu(\zeta) + C_3 P_\gamma(\zeta) + C_4 Q_\gamma(\zeta)], \quad (23)$$

where, now

$$\zeta = (1 + \eta^2)^{-1/2} \quad (0 \leq |\eta| < 1),$$

and the other quantities remain as previously defined.

Since $\Phi = z^\gamma G(\eta)$ the stresses, equations (2) to (5), can be written in terms of $G(\eta)$, and its derivatives as follows:

$$\begin{aligned} z^{-q} \sigma_r = & \nu(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) - \nu(q+2)[3(q+1)\eta^2 - 1]\eta^{-1}G'(\eta) \\ & + [3\nu(q+1)\eta^2 + q\nu - (q+1)]G''(\eta) - [\nu(1+\eta^2) - 1]\eta G'''(\eta), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} z^{-q} \sigma_\theta = & \nu(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) \\ & - (q+2)[3\nu(q+1)\eta^2 + (1-\nu)]\eta^{-1}G'(\eta) \\ & + [3\nu(q+1)\eta^2 + q\nu + 1]G''(\eta) - \nu\eta(\eta^2 + 1)G'''(\eta), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} z^{-q} \sigma_z = & (1-\nu)(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) \\ & - [3(1-\nu)(q+1)(q+2)\eta^2 - (2-\nu)(q+2)]\eta^{-1}G'(\eta) \\ & + [3(1-\nu)(q+1)\eta^2 + (2-\nu)q]G''(\eta) \\ & - \eta[(1-\nu)\eta^2 + (2-\nu)]G'''(\eta), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} z^{-q} \tau_{rz} = & - [\nu (q+1) (q+2) \eta^2 + (1-\nu)] \eta^{-2} G'(\eta) \\ & + [2\nu (q+1) \eta^2 + (1-\nu)] \eta^{-1} G''(\eta) + [1-\nu (1+\eta^2)] G'''(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

where the dashes denote differentiation with respect to η , and q is any real number.

The boundary conditions are:

$$P - T k = -\sigma_r + \tau_{rz} k, \quad (28)$$

$$P k + T = -\sigma_z k + \tau_{rz} \quad (29)$$

at the outer surface ($\omega = \alpha$) and

$$P' + T' k' = -\sigma_r + \tau_{rz} k', \quad (30)$$

$$P' k' - T' = -\sigma_z k' + \tau_{rz} \quad (31)$$

at the inner surface ($\omega = \beta$) of the shell.

Comparison of equations (24) to (27) and (28) to (31) shows that the boundary conditions can be written entirely in terms of η , $G(\eta)$ and the derivatives of $G(\eta)$ if the external loadings are of the form:

$$P = P_0 z^q, \quad T = T_0 z^q, \quad P' = P'_0 z^q, \quad T' = T'_0 z^q. \quad (32)$$

Thus the problem can be solved entirely in terms of the solution (23) of equation (1).

The Semi-Infinite Cone

The problem is that of obtaining the stress distribution within a semi-infinite cone (Figure 3). This can be accomplished by placing certain 'over-all'

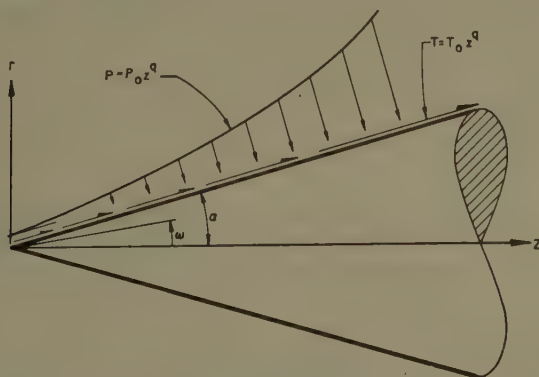


Figure 3
The Semi-Infinite Cone.

restrictions on the solution (23). Note that only two boundary conditions, equations (28) and (29), are at our disposal, and hence the solution can only contain two arbitrary constants. To eliminate the two additional constants occurring in equation (23) the physically reasonable 'over-all' condition that: 'the stresses must be finite on the z -axis' is imposed. This requires an examination of the singularities of the solution (23) as $\zeta \rightarrow 1$, $\eta \rightarrow 0$.

A suitable representation of the Legendre functions, in terms of the hypergeometric function [6], $F(\rho, \sigma; \tau; z)$, is

$$P_\mu(\zeta) = F\left(\mu + 1, -\mu; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) \quad (-1 < \zeta < 3), \quad (33)$$

and

$$Q_\mu(\zeta) = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\mu + 1)}{2^{\mu+1} \Gamma(\mu + 3/2)} \zeta^{-\mu-1} F\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mu + 1; \mu + \frac{3}{2}; \zeta^2\right) \quad (\zeta > 1), \quad (34)$$

similar expressions holding for $P_\gamma(\zeta)$ and $Q_\gamma(\zeta)$. The functions $Q_{\mu,\gamma}(\zeta)$ have a logarithmic singularity at $\eta = 0$ ($\zeta = 1$) and so will their derivatives with respect to ζ [6]. The $P_{\mu,\gamma}(\zeta)$ and their derivatives, on the other hand, are regular at $\zeta = 1$. This eliminates the functions $Q_{\mu,\gamma}(\zeta)$ from the solution (23).

It remains to be verified that the functions $P_{\mu,\gamma}(\zeta)$ do not yield infinite stresses at the z -axis. Such a situation is possible if $\eta^{-1} G'(\eta)$, contained in equations (24) to (27), is singular at $\eta = 0$, but the expression

$$\eta^{-1} G'(\eta) \sim -\zeta^3 \frac{d}{d\zeta} P_{\mu,\gamma}(\zeta)$$

is not singular as $\zeta \rightarrow 1$. Hence the stresses σ_r , σ_θ , σ_z are regular on the z -axis. It can be shown, on expressing the derivatives of $G(\eta)$ in terms of derivatives with respect to ζ , that the terms $\eta^{-2} G'(\eta)$ and $\eta^{-1} G''(\eta)$ do not make τ_{rz} , equation (27), singular as $\eta \rightarrow 0$. In fact the singularities contributed by these two terms cancel out identically.

With the above verification the desired solution is immediately seen to be:

$$G(\eta) = \zeta^{-\gamma} \left[C_1 F\left(\mu + 1, -\mu; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) + C_2 F\left(\gamma + 1, -\gamma; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) \right] \quad (35)$$

where, now

$$0 \leq \eta \leq \infty, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

$$F(\rho, \sigma; \tau; z) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+n) \Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\tau+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 1),$$

and the other quantities remain as previously defined in equations (16), (23), and (33).

The problem of determining the stress distribution within a semi-infinite solid cone, under external loadings of the type given by equation (32), can then be solved in terms of the solution (35) of equation (1).

Conclusions and Suggestions for Further Research

The solutions of the problems posed can be extended in several ways. By superposition it is possible to obtain solutions for cases where the external loadings are expressed as power series in the distance from the apex (Figures 1 to 3). The stress distributions for solids which are the finite counterparts of those shown in Figures 1 to 3 might also be determined, for certain types of boundary conditions at the crosswise surfaces, by superposition of the solutions given in this paper. Note that the superposition is made by using the stress functions and not the solutions of the ordinary (similarity) differential equation corresponding to the governing partial differential equation.

Invariant (similarity) *solutions* of the non-homogeneous biharmonic equation can also be obtained by use of the methods illustrated in this paper [7].

As suggested by TRANTER'S [8] success in the case of the semi-infinite wedge, it is possible to generalize the problems solved herein to include boundary conditions composed of piecewise continuous external loadings. This is done by application of the Mellin transform to equation (1), when expressed in spherical coordinates. Of course, the loadings are arbitrary to the extent that their Mellin transform must exist. The results of such an investigation will be presented at a later date.

APPENDIX I

The Solution of Equation (15)

Equation (15) can be split into the operator factors

$$\left. \begin{aligned} &[(\xi^2 + 1) D^2 + 2(q+1)\xi D + (q+1)^2] \\ &\times [(\xi^2 + 1) D^2 - (2q+5)\xi D + (q+3)^2] F(\xi) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1})$$

where

$$D = \left(\frac{d}{d\xi} \right).$$

Two solutions of equation (15) are obtained by setting the second of the operator factors in equation (I.1) equal to zero and applying the following transformations of dependent and independent variables:

$$F(\xi) = (\xi^2 + 1)^{(q+3)/2} v(\zeta), \quad \zeta = \xi (1 + \xi^2)^{-1/2}. \quad (\text{I.2})$$

The new dependent variable $v(\zeta)$ satisfies the Legendre differential equation [6]:

$$(\zeta^2 - 1) v''(\zeta) + 2\zeta v'(\zeta) - \gamma(\gamma + 1) v(\zeta) = 0 \quad (\gamma = q + 3), \quad (\text{I.3})$$

which has as two independent solutions the Legendre functions of the first kind, $P_\gamma(\zeta)$, and of the second kind, $Q_\gamma(\zeta)^{1,2}$.

On applying the transformations (I.2) to equation (15), the following operator representation of the transformed equation is obtained:

$$[(\zeta^2 - 1) D^2 + 2 \zeta D - \mu(\mu + 1)] [(\zeta^2 - 1) D^2 + 2 \zeta D - \gamma(\gamma + 1)] v(\zeta) = 0, \quad (\text{I.4})$$

where

$$D = \frac{d}{d\zeta}, \quad \mu = q + 1, \quad \text{and} \quad \gamma = q + 3.$$

It is a simple matter to verify that the two operator factors in equation (I.4) are commutative. Now, since each of these operator factors is a Legendre differential equation it is immediately seen that the general solution of equation (15) is given by equation (16).

Abstract

The problem of obtaining the stress distribution within semi-infinite solids bounded by two concentric cones with a common apex is formulated in terms of a fourth order ordinary differential equation. This is accomplished by using a recently developed theory for obtaining similarity solutions of partial differential equations. Such a formulation is valid when the external loadings are proportional to an arbitrary real number power of the distance from the apex. Closed solutions are given for these equations.

For certain ranges of the cone vertex angles these solids, all of linearly varying thickness, can be descriptively classified as: (i) circular plates of infinite radius, (ii) semi-infinite conical shells, and (iii) semi-infinite solid cones.

Acknowledgments

The author is indebted to Dr. H. LURIE for having generously given of his time in the discussion of certain aspects of the problems contained in this paper.

REFERENCES

- [1] MORGAN, A. J. A., *The Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations*, Quart. J. Math., Oxford Second Series, 3, No. 12, 250-259 (1952).
- [2] EISENHART, L. P., *Continuous Groups of Transformations* (Princeton University Press, Princeton, 1933).
- [3] MORGAN, A. J. A., *A General Similarity Theory of Partial Differential Equations and its Use in the Solution of Problems in Aeronautics*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology (June 1951).
- [4] TIMOSHENKO, S., *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934).
- [5] LOVE, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth revised edition (Dover Publications, New York, 1944), pp. 274-276.

¹) Further properties of Legendre functions are given in [9], [10], and [11].

²) Note that $\zeta = \cos \omega$.

- [6] INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications, New York), pp. 164–168.
- [7] MORGAN, A. J. A., *Uniformly Loaded Semi-Infinite Wedge-Shaped Plates*, J. aeron. Sci. 18, 845 (1951).
- [8] TRANTER, C. J., *The Use of the Mellin Transform in Finding the Stress Distribution in an Infinite Wedge*, Quart. J. Mech. applied Math. 1, Part. 2, 125–130 (1948).
- [9] WHITTAKER, E. T., and WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, American Edition (The Macmillan Company, New York, 1946), p. 194.
- [10] KAMKE, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Reprint (Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan, 1945), Equation 2.377, p. 494.
- [11] MACROBERT, T. M., *Spherical Harmonics*, Second Revised Edition (Dover Publications, New York, 1948).

Résumé

Le problème de déterminer la distribution de la tension dans les solides semi-infinis délimités par deux cônes concentriques ayant un sommet commun est exprimé sous forme d'équation différentielle ordinaire du quatrième degré. Ceci est fait par l'application d'une théorie récemment énoncée pour l'obtention de solutions similaires des équations différentielles partielles. Une telle expression est valide quand les forces appliquées extérieurement sont proportionnelles à une puissance d'indice réel, choisie arbitrairement, de la distance au sommet. Des solutions exactes de ces équations sont données dans le texte.

Pour certaines limites des angles du sommet d'un cône, ces solides, tous d'épaisseur à variation linéaire, peuvent être classés descriptivement comme suit: 1° plaques circulaires de rayon infini; 2° enveloppes coniques semi-infinies, et 3° cônes solides semi-infinis.

(Received: July 25, 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk

VON WALTER BOESCH, Zürich

I.

Auf einer Multipliziermaschine mit $3n + 1$ Stellen im Multiplizierwerk und $2 \cdot (3n + 1)$ Stellen im Resultatwerk können Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl mit n Stellen durch einen Abstand von $n + 1$ Stellen getrennt werden. Addition und Subtraktion sind trivial¹⁾.

¹⁾ Regelungstechnik 1953, H. 12, S. 269–292. Zitiert als [1].

II. Multiplikation komplexer Zahlen

$$\text{a) } \dot{F}_1 \dot{F}_2 \quad (\dot{F}_1 = \dot{F}_1 = \text{komplexe Zahl})$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 = (a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i - b_1 b_2. \quad (1)$$

$$\text{Vergleiche } (a_1 + b_1) (a_2 + b_2) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_1 b_2. \quad (2)$$

Durch Koeffizientenvergleich wird ersichtlich, dass man von der Gleichung (2) das zweite Glied mit i und das dritte Glied mit -1 multiplizieren muss, um die Gleichung (1) zu erhalten. Unter Berücksichtigung des unter I erwähnten Stellenabstandes der Zahlen ergibt sich auf einfache Weise die Multiplikation komplexer Zahlen.

$$\text{b) } \dot{F} \dot{F}^x \quad (\dot{F} \text{ und } \dot{F}^x = \text{konjugiert komplexe Werte})$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = (a_1 + b_1 i) (a_1 - b_1 i); \quad (3)$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = a_1^2 - a_1 b_1 i + a_1 b_1 i + b_1^2. \quad (4)$$

Aus [1] geht hervor, dass die Zahlen, die diesem Produkt entsprechen, im Produktzählwerk der Multipliziermaschine in der Reihenfolge der Gleichung (4) erscheinen.

Um unmittelbar die Summe ($a_1^2 + b_1^2$) ablesen zu können, wird umgeformt:

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = -(a_1 + b_1 i) (b_1 + a_1 i), \quad (5)$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = -a_1 b_1 i + (a_1^2 + b_1^2) + a_1 b_1 i. \quad (6)$$

Aus [1] geht wiederum hervor, dass die Zahlen auf dem Produktzählwerk in dieser Reihenfolge erscheinen.

Damit kann aber ganz allgemein auf der Multipliziermaschine die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreieckes direkt abgelesen werden.

Andere Funktionen von ähnlichem Aufbau sind analog berechenbar.

III. Division komplexer Zahlen

$$\text{a) } \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2}$$

$$\dot{F}_3 = \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = -\frac{(a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} i. \quad (7)$$

Der Nenner wird wie $\dot{F}_1 \dot{F}_1^x$ berechnet. Damit ist die Division komplexer Zahlen auf eine Multiplikation zurückgeführt.

$$\text{b) } \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_1^x}$$

$$\frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_1^x} = \frac{\dot{F}_1 \dot{F}_1}{\dot{F}_1 \dot{F}_1^x} = \frac{\dot{F}_1^2}{a_1^2 + b_1^2}. \quad (8)$$

Damit ist die Division konjugiert komplexer Zahlen in eine Multiplikation (Quadrat) komplexer Zahlen übergeführt worden.

IV. Der Kettenbruch mit komplexen Zahlen

$$\dot{F}_4 = \frac{1}{\frac{1}{\dot{F}_1} + \frac{1}{\dot{F}_2}}; \quad (9)$$

$$\dot{F}_4 = - \frac{[(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)][(b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)i]}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} i. \quad (10)$$

Der Nenner wird analog $\dot{F}_1 \dot{F}_2$ berechnet, damit ist der Kettenbruch auf eine Multiplikation komplexer Zahlen $\dot{F}_4 = (1/k) \dot{F}_1 \dot{F}_2 \dot{F}_5$ vereinfacht.

V. Praktische Hinweise

Die praktische Ausführung einer Multiplikation komplexer Werte ist in [1] beschrieben. Die hier neu angeführte Multiplikation komplex konjugierter Werte ist nach Studium obiger Literaturstelle ohne weiteres auszuführen.

Summary

It is explained how a normal mechanical calculator can be used in a very time-saving manner for all four basic forms of calculation with complex numbers, and also a short method of calculating the squares of catheds in a right angled triangle.

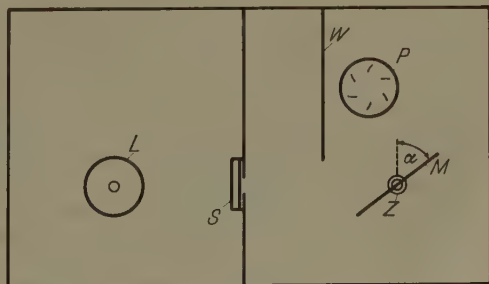
(Eingegangen: 22. März 1954.)

Prüfgerät für Photomultiplier

Von EDGAR LÜSCHER, Lausanne¹⁾

Für spektrometrische Anwendungen der Photomultiplier müssen diese zunächst geprüft werden, bevor man sie zu Messzwecken brauchen kann. Im folgenden ist eine einfache Apparatur beschrieben, die gestattet, den Dunkelstrom und die Empfindlichkeit von Photomultipliern zu messen. Das Gerät wurde vor allem zur raschen Prüfung von grossen Serien von Vervielfacherröhren entwickelt, zum Zwecke, diese Röhren zu klassieren. Die optische Messanordnung ist in Figur 1 dargestellt.

Konstantes Licht von der Lampe L tritt durch die Mattscheibe oder den Spalt auf den um die Achse Z drehbaren Lichtdiffuser, welcher das Licht auf den Vervielfacher streut. Diese Anordnung erlaubt, die totale Empfindlichkeit der Photomultiplier in Funktion des Drehwinkels α zu bestimmen. Der Lichtdiffuser M ist mit einer Schicht Magnesiumoxyd versehen, um eine möglichst gute Lichtzerstreuung zu erhalten. Die Wände des Prüfgehäuses sind schwarz.

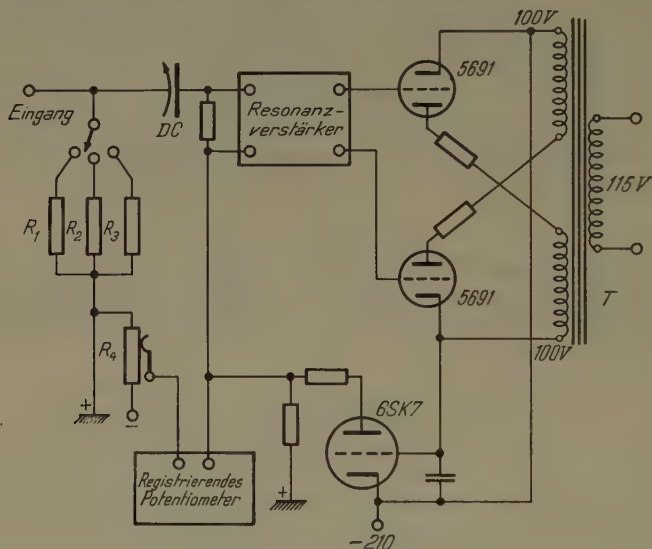


Figur 1

L Wolframlampe; S Mattscheibe oder beweglicher Spalt;
 W Trennwand; M Lichtdiffuser; P Photomultiplier;
 Z Drehachse der Diffuserscheibe.

¹⁾ Applied Research Laboratories, Lausanne.

Besondere Beachtung muss der Speisung der Lampe L geschenkt werden. Die Spannung wird mittels eines Sörensen-Regulators stabilisiert. Zusätzlich sind noch zwei Stabilisatoren OA3 geschaltet. Die Intensität der Lampe kann mit einem Widerstand variiert werden. Wird die selektive Empfindlichkeit gemessen, kann eine Spektrallampe benutzt werden und an Stelle von S eine entsprechende Filteranordnung. Ein Elektrometerverstärker mit dynamischem Kondensator mit einem Potentiometerschreiber am Ausgang dient als Messeinheit. Das prinzipielle Schema der Messanordnung ist in Figur 2 wiedergegeben.



Figur 2

Schema der Messanordnung.

Mit den Widerständen R_1 , R_2 , R_3 kann die Empfindlichkeit des Verstärkers eingestellt werden. Zur Konvertierung der Gleichspannung in Wechselspannung dient der elektromagnetisch angetriebene Plattenkondensator DC .

Die Doppeltriode 5691 mit dem Transformator T dient zur Phasengleichrichtung. Die Röhre 6SK7 dient zur Rückkopplung. Mit dem Potentiometer R_4 kann der Nullpunkt des registrierenden Potentiometers verschoben und somit dem Messbereich angepasst werden.

Mit einer Eichspannung am Verstärkereingang kann das Gerät geeicht werden; damit kann nachher die absolute Grösse des Dunkelstromes bei maximaler Dynodenspannung gemessen werden.

Der Bestimmung der totalen Empfindlichkeit muss eine Eichung für den Drehwinkel α vorausgehen. Der Ausschlag am Potentiometerschreiber wird in Funktion des Drehwinkels bestimmt und die Röhren danach klassiert.

Summary

Equipment for testing photo-multipliers with diffused light and with a special electrometer amplifier with dynamic condenser is described.

(Eingegangen: 20. Februar 1954.)

Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen

VON JOSEF ZBORNİK, Chur¹⁾

Wie H. HÖSLI in einer bemerkenswerten Arbeit zeigte²⁾, lässt sich unter den üblichen Annahmen der Windeinfluss auf Raketenbahnen verhältnismässig einfach mathematisch erfassen. Die numerische Auswertung allerdings bereitet insofern einige Schwierigkeiten, als die Lösungen auch Integrale der Form

$$\int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \quad (i = \sqrt{-1}, 0 \leq k \leq 1, 10 \leq x \leq 100) \quad (\text{A})$$

aufweisen, deren mögliche Bestimmung mittels der üblichen Potenzreihenentwicklungen praktisch versagt, weil man in Anbetracht des gegebenen Bereiches von x eine beträchtliche Anzahl von Gliedern berechnen müsste, um die gewünschte Genauigkeit³⁾ von $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ zu erreichen.

Diese Schwierigkeit kann durch Entwicklung des Integrals (A) in eine asymptotische Reihe vermieden werden, wie die nachstehenden Ausführungen zeigen.

1.

Das Doppelintegral

$$J(\infty) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(y^2+k-i)} dy dt \quad (k \geq 0, \text{ reell}),$$

in dem die Integrationen vertauschbar sind, ergibt, je nachdem man die innere oder äussere Integration zuerst ausführt:

$$\begin{aligned} J(\infty) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot 1 \int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + (k-i)} = \frac{1}{\sqrt{2} (k-i)}, \end{aligned}$$

¹⁾ Calanda S.A., Domat/Ems; Hispano-Suiza (Suisse) S.A., Genève.

²⁾ H. HÖSLI, *Störungen des Raketenfluges durch Windeinwirkung und verwandte Einflüsse*, Flugwehr und Technik 1952, 177 ff.

³⁾ Das heisst eine relative Genauigkeit von 10^{-4} für alle vorgesehenen Werte von k .

oder, wenn $k = \operatorname{ctg} w$, das heisst

$$k - i = \operatorname{ctg} w - i = \frac{1}{\sin w} (\cos w - i \sin w) = \frac{e^{-iw}}{\sin w} \quad (1)$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt = J(\infty) = \left(\frac{\sin w}{2}\right)^{1/2} e^{iw/2}. \quad (2)$$

Es ist somit

$$\left. \begin{aligned} J(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt - \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \right) \\ &= J(\infty) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &= \left(\frac{\sin w}{2}\right)^{1/2} e^{iw/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_0(x); \quad N_0(x) = \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2.

Das Integral

$$N_n(x) = \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+1)/2} dt,$$

welches für $n = 0$ mit $N_0(x)$ übereinstimmt, geht durch partielle Integration ($u = t^{-(2n+1)/2}$, $dv = e^{-t(k-i)} dt$) über in

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \left| -\frac{1}{k-i} e^{-t(k-i)} t^{-(2n+1)/2} \right|_x^\infty - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \\ &= + \frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-(2n+2)/2} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} N_0(x) &= + \frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-1/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_1(x), \\ N_1(x) &= + \frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-3/2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_2(x), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$N_n(x) = + \frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-(2n+1)/2} - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_{n+1}(x)$$

Multipliziert man in diesem Gleichungssystem die erste Zeile mit

$$(-1)^0 \cdot 1,$$

die zweite mit

$$(-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-i},$$

die dritte mit

$$(-1)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^2} \quad \text{usw.}$$

und die letzte mit

$$(-1)^n \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^n}$$

und summiert hierauf sämtliche Zeilen, so verschwinden alle Glieder, die $N_1(x)$, $N_2(x)$, ..., $N_n(x)$ enthalten, und man erhält:

$$N_0(x) = + e^{-x(k-i)} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^{m+1}} x^{-(2m+1)/2} \right\} \\ - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^{n+1}} \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt,$$

oder mit Berücksichtigung von (1) und der Identität

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \equiv 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{4} \dots \frac{2m}{2m} \equiv \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}}, \quad (4)$$

$$N_0(x) = - e^{-x(k-i)} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \binom{2m}{2} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w e^{(m+1)wi} x^{-(2n+1)/2} \right\} \\ - \binom{2n+2}{n+1} (n+1)! \frac{1}{2^{2n+2}} \sin^{n+1} w e^{(n+1)wi} \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \quad (5) \\ = + e^{-kx} x^{-1/2} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w e^{[(m+1)w+i]i} x^{-m} \right\} \\ - R_n(x) = + S_n(x) - R_n(x).$$

$S_n(x)$ wird offensichtlich für jedes feste n gleich Null, wenn x gegen Unendlich geht. Um zu zeigen, dass unter den gleichen Bedingungen auch das Restglied $R_n(x)$ verschwindet, genügt es, zu beweisen, dass für $n = 1, 2, \dots$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt = 0$$

ist, womit dann feststeht, dass $S_\infty(x)$ eine asymptotische Reihe darstellt.

Es gilt nun wegen $|e^{it}| = 1$ und $x > 1$

a) für $k \neq 0$:

$$\left| \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \right| < \left| \int_x^\infty e^{-kt} x^{-(2n+3)/2} dt \right| = x^{-(2n+3)/2} \frac{e^{-xk}}{k} = L_1 \quad \text{und}$$

b) für $k = 0$

$$\left| \int_x^\infty e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \right| \leq \left| \int_x^\infty t^{-(2n+2)/2} dt \right| = \frac{2}{2n+1} x^{-(2n+1)/2} = L_2.$$

Da offenbar sowohl $\lim_{x \rightarrow \infty} L_1$ als auch $\lim_{x \rightarrow \infty} L_2$ bei festem n gleich Null wird, so konvergiert $R_n(x)$ gegen Null, wenn $x \rightarrow \infty$ geht, was zu beweisen war.

3.

Die Substitution von (5) in (3) liefert demnach die gesuchte asymptotische Darstellung:

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \approx \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} e^{iw/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-kx} x^{-1/2} \times \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w e^{[(m+1)w+x]i} x^{-m} \right\}. \quad (6)$$

Durch Zerlegung von $J(x)$ in Real- und Imaginärteil ergeben sich die asymptotischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos t e^{-kt} t^{-1/2} dt \approx \cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w \cos[(m+1)w+x] x^{-m} \\ & = \cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin w \cos(w+x) \right. \\ & \quad - \sin^2 w \cos(2w+x) \frac{1}{2x} + \sin^3 w \cos(3w+x) \frac{3}{4x^2} \\ & \quad \left. - \sin^4 w \cos(4w+x) \frac{15}{8x^3} + \sin^5 w \cos(5w+x) \frac{105}{16x^4} - + \dots \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin t e^{-kt} t^{-1/2} dt \approx \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w \sin[(m+1)w+x] x^{-m} \\ & = \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin w \sin(w+x) \right. \\ & \quad - \sin^2 w \sin(2w+x) \frac{1}{2x} + \sin^3 w \sin(3w+x) \frac{3}{4x^2} \\ & \quad \left. - \sin^4 w \sin(4w+x) \frac{15}{8x^3} + \sin^5 w \sin(5w+x) \frac{105}{14x^4} - + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Setzt man $k = 0$, das heisst $w = \pi/2$, so erhält man die entsprechenden asymptotischen Reihen für die Fresnelschen Integrale:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \int_0^x \cos t \, t^{-1/2} dt \approx \frac{1}{2} + (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \begin{aligned} &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin \frac{x + m\pi}{2} x^{-m} \\ &= \frac{1}{2} + (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin x - \cos x \frac{1}{2x} - \sin x \frac{3}{4x^2} + \cos x \frac{15}{8x^3} \right. \\ &\quad \left. + \sin x \frac{105}{16x^4} - - + + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin t \, t^{-1/2} dt \approx \frac{1}{2} - (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \begin{aligned} &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \cos \frac{x + m\pi}{2} x^{-m} \\ &= \frac{1}{2} - (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \cos x + \sin x \frac{1}{2x} - \cos x \frac{3}{4x^2} - \sin x \frac{15}{8x^3} \right. \\ &\quad \left. + \cos x \frac{105}{16x^4} + - - + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

4.

Da in asymptotischen Reihen das Restglied bzw. dessen Absolutwert $|R_n(x)|$ den des letzten Gliedes der Reihe $S_n(x)$ nicht übersteigen kann, so gilt mit Beachtung von (3), (4), (5) und $k \geq 0$, $x > 0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \left| e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} (-1)^n \binom{2n}{n} n! \frac{1}{2^{2n}} e^{[(n+1)w+x]i} \sin^{n+1} w x^{-n} \right| \\ &\leq \left| e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} x^{-n} \right| \\ &\leq \left| (2\pi x)^{-1/2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} x^{-n} \right|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun für

$$x = 10, \quad n = 4: \quad |R_4(10)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 10^{-4,5} \doteq 8 \cdot 10^{-5}$$

und für

$$x = 20, \quad n = 2: \quad |R_2(20)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 20^{-2,5} \doteq 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

Tabelle 1
Hilfswerte zur numerischen Bestimmung der Integrale (7) bis (10)

h	w	$2w$	$3w$	$4w$	$5w$	$\log \sin w$	$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$	$\frac{w}{\sin \frac{w}{2}} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$
0,0	90° 0' 0"	180° 0' 0"	270° 0' 0"	360° 0' 0"	450° 0' 0"	0,00000	0,50000	0,50000
0,1	84° 17' 21,6"	168° 34' 43"	252° 52' 5"	337° 9' 26"	421° 26' 48"	0,99784-1	0,52300	0,47329
0,2	78° 41' 24,5"	157° 22' 49"	236° 4' 14"	314° 45' 38"	393° 27' 3"	0,99148-1	0,54150	0,44392
0,3	73° 18' 2,6"	146° 36' 5"	219° 54' 8"	293° 12' 10"	366° 30' 13"	0,98129-1	0,55523	0,41309
0,4	68° 11' 54,8"	136° 23' 50"	204° 35' 44"	272° 47' 39"	340° 59' 34"	0,96777-1	0,56421	0,38198
0,5	63° 26' 5,7"	126° 52' 11"	190° 18' 17"	253° 44' 23"	317° 10' 29"	0,95155-1	0,56888	0,35158
0,6	59° 2' 14,2"	118° 4' 28"	177° 6' 43"	236° 8' 57"	295° 11' 11"	0,93324-1	0,56981	0,32262
0,7	55° 0' 29,0"	110° 0' 58"	165° 1' 27"	220° 1' 56"	275° 2' 25"	0,91340-1	0,56768	0,29557
0,8	51° 20' 25,5"	102° 40' 51"	154° 1' 16"	205° 21' 42"	256° 42' 8"	0,89258-1	0,56319	0,27068
0,9	48° 0' 46,5"	96° 1' 33"	144° 2' 20"	192° 3' 6"	240° 3' 53"	0,87116-1	0,55689	0,24802
1,0	45° 0' 0"	90° 0' 0"	135° 0' 0"	180° 0' 0"	225° 0' 0"	0,84949-1	0,54935	0,22755

Tabelle 2
Umrechnung der in Frage kommenden x -Werte ins Winkelmaß

$x = \arccos \varphi$	$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$	$x = \arcsin \varphi$	$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$
1			
2	+ 57° 17' 44,8"	20	6 · 180° + 65° 54' 56,1"
3	+ 114° 35' 29,6"	30	9 · 180° + 98° 52' 24,2"
4	+ 171° 53' 14,4"	40	12 · 180° + 131° 49' 52,3"
5	1 · 180° + 49° 10' 59,2"	50	15 · 180° + 164° 47' 20,3"
	1 · 180° + 106° 28' 44,0"		
6	1 · 180° + 163° 46' 28,9"	60	19 · 180° + 17° 44' 48,4"
7	2 · 180° + 41° 4' 13,7"	70	22 · 180° + 50° 42' 16,5"
8	2 · 180° + 98° 21' 58,5"	80	25 · 180° + 83° 39' 44,5"
9	2 · 180° + 155° 39' 43,3"	90	28 · 180° + 116° 37' 12,6"
10	3 · 180° + 32° 57' 28,1"	100	31 · 180° + 149° 34' 40,6"

Die geforderte Genauigkeit von $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ wird somit bei sämtlichen Reihen (7) bis (10) erreicht, wenn man für $10 \leq x \leq 20$ bei $m = 4$ und für $x > 20$ bei $m = 2$ abbricht.

Für sehr grosses x gelten gemäss (7) bis (10) die Approximationen

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^x \cos t e^{-kt} t^{-1/2} dt \doteq \cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \sin w \cos(w+x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^x \sin t e^{-kt} t^{-1/2} dt \doteq \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \sin w \sin(w+x),$$

$$(w = \operatorname{arccotg} k);$$

$$C(x) \doteq \frac{1}{2} + (2\pi x)^{-1/2} \sin x \quad \text{und} \quad S(x) \doteq \frac{1}{2} - (2\pi x)^{-1/2} \cos x.$$

Die Nullstellen der Funktion $C(x) - 1/2$ bzw. $S(x) - 1/2$ liegen somit für $1 \ll x$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $N\pi$ bzw. $(N + 1/2)\pi$ ($N =$ natürliche Zahl).

In analoger Weise nehmen die Funktionen (7) und (8) die konstanten Werte

$$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$$

für sehr grosses x an, wenn dieses in einer beliebig kleinen Umgebung von $N\pi + (\pi/2) - w$ bzw. von $N\pi - w$ liegt.

5.

Die nebenstehenden Tabellen geben die Werte von

$$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{und} \quad \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{für } k = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$$

und die Umrechnung von x in Grade für $x = 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 100$ an.

Summary

Calculating the influence of the wind on the trajectories of rockets (see footnote 2) we find functions of the form

$$f(x) = \int_0^x e^{-t(k \pm i)} t^{-1/2} dt \quad (i = \sqrt{-1}),$$

where, in general, $0 \leq k \leq 1$ and $x \geq 10$. The present article shows that integrals of such a kind can be represented by asymptotic series convenient for the numerical evaluation with regard to the large values of x . The results are given by formulae (6) to (8). Putting $k = 0$ we get the analogous formulae (9) and (10) for FRESNEL's integrals. To facilitate the computation, two auxiliary tables are added to this paper.

(Eingegangen: 26. Oktober 1953.)

Erratum

Boundary Layer on Rotating Spheroids. By BHASKAR SADASHIV FADNIS, Kharagpur, India (ZAMP 5, Fasc. 2, 156 [1954]). Equations (2.1), (2.2), and (2.3) obviously contain many more terms on their right-hand side and this should be indicated by $+\dots$. In fact, equations (2.1), (2.2), and (2.3) are written down from the vector equation

$$v \times w = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + v \text{ curl } w,$$

where v and w are the velocity and the vorticity vectors respectively.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Collected Papers of Peter W. J. Debye. (Interscience Publishers, Inc., New York, 1954.) 700 pp., \$9.50.

Es ist einem ehemaligen Schüler nach Durchsicht der Gesammelten Schriften Prof. DEBYES, die anlässlich seines 70. Geburtstages (24. März 1954) von seinen Freunden und Mitarbeitern herausgegeben wurden, selbstverständlich eine freudige Pflicht, die Aufgabe des Rezensenten übernehmen zu dürfen. Er erinnert sich dabei wieder der begeisternden Vorlesungen, welche DEBYE in den zwanziger Jahren in Zürich an der ETH. gehalten hat, ihrer bewundernswürdigen Klarheit und Sachlichkeit und ihrer schöpferischen Mittelbarkeit. Was aber vor allem aus den Gesammelten Werken des Gefeierten spricht, ist die erstaunliche Vielseitigkeit des Gelehrten, der es auf den verschiedensten Gebieten der Physik und Chemie verstand, neue Erkenntnisse zu vermitteln.

Die Gesammelten Schriften sind in fünf Abschnitte gegliedert. Im ersten befinden sich die Arbeiten aus dem Gebiete der Röntgenstrahlen. Als Kernpunkt steht das mit SCHERRER entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Kristallstruktur aus den Interferenzen von Röntgenlicht an regellos orientierten Teilchen, welches Verfahren unter dem Namen Debye-Scherrer-Methode für die Röntgenometrie von ausschlaggebender Bedeutung wurde. Im zweiten Abschnitt folgen die Veröffentlichungen, die im Zusammenhang mit dem Begriff des elektrischen Momentes der Moleküle stehen. Sie spielen für den Chemiker in Fragen des strukturellen Aufbaus der Moleküle eine massgebende Rolle.

Der dritte Abschnitt umfasst die Schriften über Elektrolyte, welche grösstenteils in Zusammenarbeit mit andern Autoren entstanden sind. Sie führten vorerst zu einer Klarstellung der fundamentalen Begriffe und bilden mit ihren Modellvorstellungen die Basis der modernen Elektrolytchemie. Der vierte Teil bringt Arbeiten über Lichtstreuung in hochpolymeren Lösungen und kolloidalen Systemen. Diese Mitteilungen sind ausschliesslich neuesten Datums; sie gelangten aber rasch in der Physik der Hochmolekularen zu anerkannter Bedeutung und führten unter anderem zu einer einwandfreien Bestimmung des Molekulargewichtes. Im letzten, fünften Abschnitt sind endlich jene Veröffentlichungen DEBYES wiedergegeben, die sich nicht in ein bestimmtes Erscheinungsgebiet ein-

ordnen lassen. Unter ihnen finden wir die Arbeit über Lichtstreuung durch Ultraschallwellen, welche die heute unter dem Namen Debye-Sears-Effekt bekannte Erscheinung behandelt.

Das umfangreiche Sammelwerk wird nicht nur den ehemaligen Schülern und Mitarbeitern eine grosse Freude bereiten, sondern auch jedem interessierten Leser, weil es Einblick in das Leben und Wirken einer Persönlichkeit bietet, die es verstanden hat, einerseits in meisterhafter und gütiger Weise den Nachwuchs von Lehrern und Forschern zu fördern und anderseits ein bleibendes Werk eigener wegleitender Erkenntnisse zu schaffen.

R. Sängner

Progress in Nuclear Physics, Vol. 2. By O. R. FRISCH (Pergamon Press Ltd., London, 1952). 295 pp.; £3/3/0.

Die Kernphysik hat in jüngster Zeit so ungeheure Fortschritte gemacht, sowohl auf experimentellem wie auch auf theoretischem Gebiet, dass es für den einzelnen Forscher unmöglich geworden ist, alle Teilgebiete in gleicher Weise zu beherrschen. Deshalb ist auch dieses Buch sehr zu begrüßen, in welchem ausgesprochene Fachleute ihre Kenntnisse in einzelnen Artikeln zur Darstellung bringen. Dabei handelt es sich um eine Auswahl besonders aktueller Probleme:

1. The Electron Optical Properties of Magnetic Beta Ray Spectrometers (N. F. VERSTER);
2. Nuclear Paramagnetic Resonance (R. V. POUND);
3. Luminescent Materials For Scintillation Counters (G. F. J. GARLIK);
4. The Neutron Proton Interaction (G. L. SQUIRES);
5. Fission (W. J. WHITEHOUSE);
6. The Low-Lying Excited States of Light Nuclei (W. E. BURCHAM);
7. The Nuclear Shell Modell (B. H. FLOWERS);
8. Ionisation by Fast Particles (T. E. CRANSHAW).

Dieses Buch gibt einen ausgezeichneten Überblick über den heutigen Stand der Physik auf diesen Gebieten und vermittelt am Ende jeden Kapitels Literaturangaben über die einschlägigen Arbeiten des betreffenden Wissensgebietes. Es ist jedem Kernphysiker, der sich für die theoretische Deutung experimentellen Materials interessiert, sicher eine wertvolle Lektüre.

O. Huber

Nomogramme zum praktischen Rechnen. Von E. VÖLLM, Zürich. Herausgegeben von ED. AERNI-LEUCH, Bern. Preis pro Blatt 35 Rp.

Von den zwei gedruckten Rechenblättern handelt es sich beim ersten um eine sehr zweckmässige Tafel zur Bestimmung von logarithmischen Leitern beliebigen Moduls in der Nomographie. Die zweite Tafel stellt ein Nomogramm für den Sinussatz der ebenen und der sphärischen Trigonometrie dar.

Das erste Blatt wird jedem willkommen sein, der praktische Nomogramme zeichnet, während beim zweiten besonders auf den didaktischen Wert für den Unterricht hingewiesen sei.

H. Künzi

Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. By S. BERGMAN and M. SCHIFFER (Academic Press Inc., Publishers, New York, 1953).

In den letzten Jahren hat die von BERMAN und BOCHNER 1922 eingeführte Kernfunktion unter der Zusammenarbeit von BERGMAN und SCHIFFER bei Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen eine zentrale Stellung erobert. Ist die zu einer elliptischen Differentialgleichung in einem Gebiet ge-

hörige Kernfunktion bekannt, so lassen sich die Lösungen der Randwertaufgaben erster, zweiter und dritter Art sowie die Greensche, Neumannsche und Robinsche Funktion durch Quadraturen herstellen. Der erste Teil des Buches gibt eine Übersicht über die bei verschiedenen Gegenständen (Wärmeleitung, Hydrodynamik, Elektro- und Magnetostatik und Elastizitätstheorie) vorkommenden Randwertprobleme als Motivierung und Illustration der im zweiten Teil behandelten Theorie.

A. Pfluger

Aerodynamics of Propulsion. By D. KÜCHEMANN and J. WEBER. (McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., London 1953). 331 pp., 150 figs.; \$9.-

Mit ihrer Publikation fügen die Verfasser der Schriftenreihe J. C. HUNSAKERS «McGraw-Hill Publications in Aeronautical Science» einen weiteren Band bei und geben damit einem neuen Zweiggebiet der Aerodynamik den Namen. Die bisherigen Gesamtdarstellungen der Aerodynamik befassen sich vorwiegend mit der Erzeugung des Auftriebs, während hier die Strömungsprobleme der Erzeugung des Vortriebs erstmals zusammengefasst werden.

Dem Kernproblem der Vortriebserzeugung, der mechanischen und thermischen Energiezufuhr an Gasströme sind die allgemeinen Kapitel gewidmet. Wesentlich ist nun aber, dass in die Vortriebsaerodynamik die zahlreichen Probleme der Luftführungen, Kanalströmungen, Einlaufformen, Mündungen, wie sie bei Luftentnahmen, Tunnelschrauben, Kühlern und bei jeder Triebwerksinstallation in Flugzeugen zahlreich auftreten, eingeschlossen werden. Was nur mühsam und weit verstreut in der Literatur der Luftfahrttechnik aufgefunden werden kann, ist hier in verwertbarer Form und reich belegt durch zum Teil unveröffentlichte Messungen geordnet wiedergegeben. Das Buch begrenzt das neue Teilgebiet einerseits mit der Strahlausbreitung der Strahlantriebe und andererseits mit den Vortriebserzeugung des Insektenfluges.

Die aerodynamischen Probleme der Turbomaschinen und Propeller sind mit Recht ausserhalb der Betrachtungen gestellt, und die Propulsionsaerodynamik bei Überschall als noch zu unerforscht nicht in die Arbeit aufgenommen. Eine passive Form der Vortriebserzeugung, die Grenzschichtabsaugung, tritt hier in den Hintergrund, wahrscheinlich weil sie ebenso sehr mit der Profilaerodynamik wie mit der Vortriebserzeugung verknüpft ist.

W. Spillmann

Proceedings of the Western Computer Conference. Held by the Joint ARE-AIEE-ACM Computer Conference Committee Los Angeles, California, February 4 to 6, 1953. (Published by The Institute of Radio Engineers, Inc., New York, 1953). 231 pp., 135 figs.; \$3.50.

Die überaus schnelle, an vielen verschiedenen Orten betriebene Entwicklung der elektronischen Rechengерäte macht einen regelmässigen Gedankenaustausch der beteiligten Forscher zu einer Notwendigkeit. Der vorliegende Band ist das Protokoll einer solchen Tagung. Digitale und Analogierechengерäte sind in gleicher Weise berücksichtigt. Das Hauptgewicht liegt hier nicht so sehr auf den technischen Details der Rechengерäte als auf organisatorischen Fragen des Einsatzes; ferner auf den Erfahrungen bei der Lösung praktischer Probleme, die zumeist dem Flugzeugbau entstammen. Interessant sind verschiedene Verfahren zur Umwandlung zwischen digitalen und Analogiegrössen sowie die ständig zunehmende Verwendung von Netzwerken für partielle Differentialgleichungen. Das Buch vermittelt dem Leser einen überaus wertvollen Einblick in eine grosse Menge praktischer Erfahrungen.

A. Speiser

ELEKTRONENMIKROSKOPE
MIKROTOME
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

NEUERSCHEINUNGEN

Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, herausgegeben von Prof. Dr. E. Stiefel.

- Nr. ⑤ Tabellen zur Erzeugung von Funktionen einer und zweier Variablen mit linearen Potentiometern. Von *Moheb Aziz Abdel-Messih*. (1954). 33 Seiten. Broschiert Fr. 4.70.
- Nr. ④ An Oscillation Theorem for Algebraic Eigenvalue Problems and its Applications. Von *Frank W. Sinden*. (1954). 57 Seiten. Broschiert Fr. 6.25.

Früher erschienen:

- Nr. ① Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. Von *Ambros P. Speiser*. (1950). 67 Seiten. Broschiert Fr. 6.75.
- Nr. ② Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen). Von *Heinz Rutishauser, Ambros Speiser* und *Eduard Stiefel*. (1951). 102 Seiten. Broschiert Fr. 8.85.
- Nr. ③ Automatische Rechenplanfertigung bei programmgesteuerten Rechenmaschinen. Von *Heinz Rutishauser*. (1952). 45 Seiten. Broschiert Fr. 5.70.

A. OSTROWSKI: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.*
Band III: *Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen.* 475 Seiten mit 36 Figuren. (1954).
Gebunden Fr. 78.—, broschiert Fr. 73.85.

VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL/STUTTGART



Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten
unsere Spezialität

Clichés

SCHÜTZENMATTSTR. 31

STEINER+CO BASEL